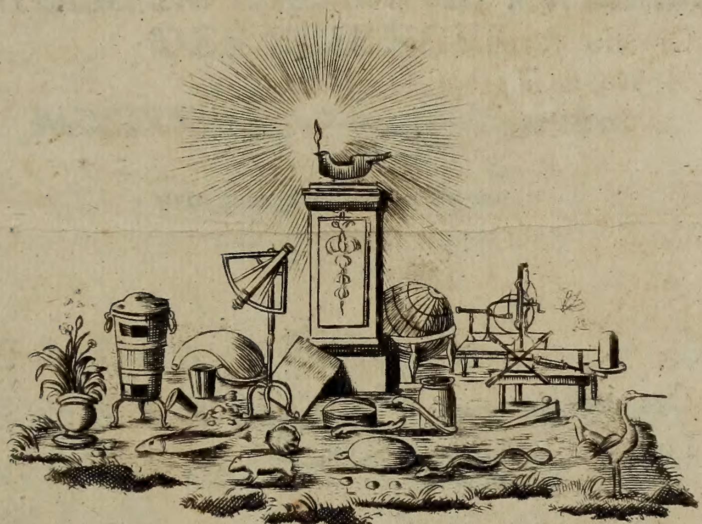
ACTA
ACADEMIAE SCIENTIARVM
IMPERIALIS
PETROPOLITANAE

pro Anno MDCCLXXX.

PARS POSTERIOR.



PETROPOLI
TYPIS ACADEMIAE SCIENTIARVM
MDCCLXXXIV.

TABLE.

HISTOIRE DE L'ACADÉMIE IMPÉRIALE DES SCIENCES.

MDCCLXXX. Juillet —— Décembre.

avec une planche de figures.

Pag.

METEOROLOGIE.

 ASSO-

ACTA ACADEMIAE SCIENTIARVM IMPERIALIS PETROPOLITANAE

ad Annum MDCCLXXX. Pars posterior.

Cum tabulis X. aeri incisis.

MATHEMATICA

PHYSICO-MATHEMATICA

PHYSICA

PET.

ASTRONOMICA

CORRI-

CORRIGENDA.

pag. 177. lin. 16 et 18: *item*
pag. 178. lin. 2. loco Log. hyp. $(45^\circ+\frac{1}{2}I)$ lege
Log. hyp. Tang. $(45^\circ+\frac{1}{2}I)$.

HISTOIRE
DE
L'ACADÉMIE IMPÉRIALE
DES
SCIENCES.

HISTOIRE
DE L'ACADÉMIE.

MDCCLXXX.

Juillet —— Décembre.

L'Empereur JOSEPH II. qui ſous le nom du Comte *de Falkenſtein* a parcouru tous les endroits & établiſſemens remarquables de St. Pétersbourg, n'a pas voulu manquer d'honorer auſſi de ſa viſite l'Académie Impériale des ſciences.

Ce fut Mecrédi le 1 Juillet vers midi que le Directeur de l'Académie, M. le Chambellan *de Domaſchnef*, eut l'honneur de recevoir cet hôte Auguſte ſur l'eſcalier du bâtiment académique, qui renferme la bibliotheque, l'obſervatoire et les cabinets de curioſités et d'hiſtoire

naturelle. Les Académiciens nommés pour faire voir à l'Illustre voyageur les collections les plus remarquables qui y sont déposées, le conduisirent par tous le appartemens. Rien n'échappa à sa pénétration: mais ce qui fixa le plus son attention, ce fut l'image de PIERRE I, de grandeur naturelle, poussée en cire, & le manuscript original françois de l'Instruction pour le nouveau Code de loix, écrite de la main propre de la Législatrice de Russie. M. le Comte *de Falckenstein* en lut divers articles avec une admiration toute particuliere, & le Directeur saisit cette occasion de Lui faire accepter un exemplaire de la grande édition de cet ouvrage en quatre langues que l'Illustre étranger reçut avec une satisfaction distinguée. Il se rendit ensuite à la salle des Assemblées académiques, où le Directeur eut l'honneur de Lui présenter tous les Académiciens & Adjoints. L'auguste voyageur daigna s'entretenir avec quelques uns d'entr'eux, & reçut gracieusement la liste des Académiciens, où se trouvent indiquées les sciences auxquelles chacun d'eux s'est principalement voüé; avec une notice des memoires présentés & destinés à être lus, en cas qu'il eut plû à l'Auguste passager d'assister à une séance académique. Ces mémoires étoient.

1. Gedanken über eine zwischen Rusland und Deutschland auf der Donau und dem schwartzen Meere zu eröffnende Handlung: par M. le Prof. *Güldenstädt.*

2. Reflexions sur les anciens travaux des mines de Sibérie & sur leur rapport avec ceux de Hongrie qui se distinguent des travaux romains: par M. le Prof. *Pallas.*

Mon-

Monsieur le Comte s'arrêta ensuite dans le Cabinet de Physique expérimentale, où Il daigna assister avec attention à quelques expériences qu'on y fit avec le grand Electrophore, dont il se trouve une déscription au premier volume de ces Actes. Enfin Il traversa aussi les autres départemens de l'Académie, le Bureau Géographique, la Typographie & l'Imprimerie des Cartes & des Estampes: & Il ne partit qu'à 2 heures & demie après midi avec des témoignages de contentement infiniment flatteurs pour l'Académie.

Une autre visite dont l'Académie Impériale des Sciences a été honorée dans le courant de ce semestre est celle du Prince Royal de Prusse FRÉDERIC GUILLAUME, S. A. R. ayant désigné le Samdi 19 Septembre pour voir l'Académie, s'y rendit vers onze heures. M. le Chambellan *de Domaschnef*, Directeur & Mrs. les Professeurs *Kotelnikof*, *Wolff*, et *Pallas* reçurent le Prince au bas de l'Escalier du bâtiment, qui renferme la Bibliotheque & lés Cabinets des curiosités & d'Histoire naturelle. S. A. R. les ayant tous parcourus, & étant montée même tout au haut de l'Observatoire, se rendit ensuite à l'autre bâtiment, où les deux Secrétaires, c'est à dire Mrs. *Jean Albert Euler* pour les sciences & *Protassof* pour l'administration économique eurent l'honneur de La reçevoir à l'entrée, & de La conduire à la Sale d'Assemblée, où S. A. R. fut complimentée par tous les Académiciens & Adjoints, qui s'y trouvoient assemblés pour tenir leur séance annuelle & publique. La présence

du Prince y avoit encore attiré une multitude de personnes de toutes les conditions. M. *de Domaſchnef* offrit à l'illuſtre Hôte le fauteuil, mais S. A. R. refuſa cette place d'honneur & s'aſſit ſur une chaiſe ordinaire vis-a-vis du Directeur, qui avoit à ſa droite les Académiciens honoraires & à ſa gauche les ordinaires & les Adjoints.

Après cette Séance S. A. R. alla encore voir le département Géographique & finalement le grand Globe de Gottorp. Elle ſe retira vers une heure & demie, en témoignant au Directeur & à toute l'Académie dans les termes les plus gracieux combien Elle étoit ſenſible aux hommages qu'on venoit de lui rendre.

Cette viſite fut ſuivie d'un événement très glorieux pour l'Académie: c'eſt l'aggrégation de S. A. R. Msgr. le Prince de Pruſſe au nombre des Honoraires. M. *de Domaſchnef*, après s'être aſſuré des diſpoſitions favorables de S. A. R., Lui avoit écrit au nom de l'Académie pour Lui en demander la permiſſion, & le Prince ayant gracieuſement accepté cette offre, les Académiciens eurent l'honneur de ſe rendre en corps chez S. A. R. la veille de ſon départ (le 1 Octobre), & de Lui préſenter le Diplome conçu en ces termes.

SERE-

SERENISSIMAE AC POTENTISSIMAE IMPERATRICIS

CATHARINAE SECVNDAE

AVGVSTAE

AVSPICIIS

CELSISSIMVM ET CLEMENTISSIMVM PINCIPEM REGIVM

FRIDERICVM GVILLELMVM

BORVSSIAE PRINCIPEM HAEREDITARIVM

LITTERARVM FAVTOREM ET PROMOTOREM

SOLEMNI HAC DIPLOMATAE

ACADEMICVM HONORARIVM

RENVNCIAT

Scientiis et ſibi de tanto noui litterarum ſplendoris et Patrocinii pignore gratulata

IMPERIALIS ACADEMIA SCIENTIARVM PETROPOLITANA

SERGIVS DOMASCHNEF
Academiae Director

Anno MDCCLXXX
die 28 Septembris.

Ioh. Albertus Euler
Academici Conuentus
Secretarius.

ASSEM-

ASSEMBLÉE PUBLIQUE.

L'Assemblée annuelle & publique s'est tenue le Samedi 19 Septembre vers midi. Elle a été honorée de la présence de S. A. R. Monseigneur le Prince Royal de Prusse, des Cavaliers de Sa suite, du haut Clergé, des Ministres des cours étrangeres & de plusieurs autres personnes de distinction:

Le Secrétaire de conférence *Jean Albert Euler* fit l'ouverture de la séance en addressant à S. A. R. les paroles suivantes.

MONSEIGNEUR!

Appellé à être l'interprète des sentimens qui dans cette journée solemnelle animent mes confrères, je ne crains pas de manquer à leur attente en donnant un libre cours à la joie qui me pénètre: plusieurs d'entr'eux ont comme moi passé une partie de leur vie dans ces états où regne FRÉDERIC le Grand, admiré des Philosophes & Philosophe lui même: plusieurs d'entre nous y ont puisé les connoissances qui nous ont mérité les places que nous occupons ici; tous le autres ont participé également, & avec reconnoissance, aux lumieres qui sont écloses sous le règne bienfaisant de ce Sage qui non seulement dans ses provinces fait fleurir les arts & les sciences, protege, anime & encourage Son Académie, mais qui

qui encore a bien voulu donner un rélief à la nôtre, en s'associant à nous & en nous permettant de placer Son nom Auguste à la tête des nos honoraires. Aujourd'hui, Monseigneur, que nous avons l'honneur de voir en Votre Altesse Royale l'héritier des ses grandes vertus, l'ésperance & les délices des peuples assujettis à Son Sceptre: aujourd'hui que nous jouissons du gracieux accueil que Votre Altesse Royale fait à nos hommages: qu'Elle assiste à cette Solemnité consacrée à célébrer la Protection distinguée de notre Grande Impératrice & très gracieuse Souveraine: aujourd'hui que Votre Altesse Royale joint Ses voeux aux nôtres pour la durée d'un regne, dont chaque jour est marqué par des bienfaits nouveaux, & pour la félicité des temps à venir, que nous font esperer les Illustres Rejettons de sa famille Impériale; c'est aujourd'hui que nous ressentons notre bonheur dans toute Son étendue, & que nous nous glorifions d'une journée qui à jamais fera une époque des plus mémorables dans nos fastes.

M. *Pallas* lut ensuite un mémoire sur les variétés des animaux, & M. *Fuss* un autre sur les satellites des Étoiles fixes, que l'Abbé *Mayer* prétendoit avoir découverts à Manheim.

Après ces lectures, M. *de Domaschnef* prenant la parole publia ce qui se rapportoit aux Prix. Celui de cent ducats qui devoit être adjugé cette année concernoit la question suivante:

Quelle est la nature & le caractère des sons voyelles si essentiellement différens entr'eux? Et

 comme

comme les facteurs d'Orgues ont tâché depuis longtemps d'imiter dans les jeux d'Orgue, quoiqu'avec un succès fort douteux, la voix humaine, en employant certains tuyaux, qui prononcent presque généralement la voyelle composée *ai*, l'Académie demande en second lieu: si l'on ne pourroit pas construire des instrumens semblables aux tuyaux de ce jeu d'Anche connu sous le nom de voix humaine, qui imitassent parfaitement les différentes voyelles *a*, *e*, *i*, *o*, *u*, moyennant quelques changemens apportés à la figure du tuyau, du noyau, de l'echalotte, ou de quelque autre partie essentielle, qui influe sur le genre & la qualité du son, & donne au jeu mentionné cette harmonie si agréable & si différente de celle des autres jeux.

Ce Prix fut décerné au Mémoire latin No. 2, ayant la devise *Plus ultra*, qui étoit accompagné d'un petit Orgue, qui prononce non seulement d'une maniere assés distincte les cinq voyelles, mais encore divers autres sons articulés. Le billet cacheté ayant été ouvert, on y trouva le nom de *Christian Gottlieb Kratzenstein*, Professeur de Physique expérimentale à Coppenhague. Il fut deplus fait une mention honorable d'un autre petit Orgue présenté à l'Académie par le Sr. *Kristnec*, habile facteur d'instrumens de Musique à St. Pétersbourg, lequel prononce aussi les cinq voyelles, mais moins distinctement: l'Académie lui accorda l'accessit & la médaille d'argent. Les autres billets cachetés furent brulés, & le Secrétaire lut l'extrait de la Piece couronnée.

M.

M. *de Domaschnef* annonça la mort du Docteur *Gaubius* à Leyde, un des Externes de l'Académie & digne des ses regréts: il procéda ensuite à la nomination de six nouveaux membres externes & termina la séance par la publication d'une nouvelle question que l'Académie propose pour le Prix de 1783.

Programme
du Prix proposé par l'Académie Impériale des Sciences le 19 Septembre 1780.

Traduit du Latin.

On met à bon droit au nombre des principales découvertes de ce siecle, celle par laquelle Papin en Allemagne Saverin & d'autres en Angleterre ont appliqué avec succès les vapeurs élastiques de l'eau bouillante à des usages méchaniques: tandis que les Physiciens des siècles précédens ne pouvoient concevoir que de telles vapeurs fussent susceptibles d'être astreintes à des mouvemens réguliers & employées à faire mouvoir des machines.

Cependant cette invention est non seulement recommandable comme très ingénieuse, mais aussi comme très utile, de semblables machines pouvant servir à élever les eaux lorsqu'on veut vuider des canaux, délivrer des contrées des inondations qui s'y sont répandues ou des bas-fonds des eaux stagnantes; on s'en sert aussi dans les

mines de metaux & de charbons de terre, & dans plusieurs autres opérations tant hydrauliques que méchaniques.

Quoique ces machines ſoient actuellement conduites à un grand degré de perfection, il n'eſt pas à douter qu'on ne pût s'en promettre encore des uſages beaucoup plus conſidérables, ſi leur théorie étoit plus développée qu'elle ne l'a été jusqu'ici; par ce moyen on connoitroit mieux les forces des vapeurs élaſtiques, les réſiſtances que de telles machines ont à ſurmonter, & la preſſion de l'air externe, entant qu'il concourt à ces mouvemens; d'où réſulteroit un calcul plus exact des effets qu'on peut ſe promettre de ſemblables machines, avec une détermination des dimenſions les plus ſimples & les plus efficaces, requiſes pour obtenir ces effets.

La théorie de ces machines formeroit un accroiſſement conſidérable de la pneumatique ou doctrine des forces des fluides élaſtiques; en même tems qu'elle contribueroit beaucoup aux avantages de la ſocieté: de ſorte qu'on regarde le Problème ſuivant, comme tout à fait digne des profondes recherches des Mathématiciens.

Expoſer la théorie des Machines que la force du feu ou des vapeurs fait mouvoir.

L'Académie Impériale invite tous les ſavans, qui voudront travailler ſur ce ſujet, à envoyer leurs Mémoires avant le 1er Juillet MDCCLXXXIII; promettant à celui qui aura remporté ſon ſuffrage, un Prix de cent Ducats d'Hollande.

Ces

Ces Mémoires doivent être écrits diſtinctement, en Langue Ruſſe, Latine, Allemande ou Françoiſe; & leurs Auteurs ne ſe feront pas connoître; mais ils mettront dans un billet cachetté leur nom avec la deviſe du Mémoire. L'Addreſſe eſt à M. *Jean Albert Euler*, Secrétaire de l'Académie Impériale des Sciences, qui donnera ſon Recepiſſé, où il marquera le No. de la Piece. Après le terme susdit on ne recevra aucun mémoire.

Le Jugement de l'Académie ſera déclaré dans l'Aſſemblée publique de l'Année MDCCLXXXIII.

Sur la formation & ſur l'imitation artificielle de la voix humaine.

Extrait de la Diſſertation de M. le Prof. *Kratzenſtein* qui a remporté le Prix de 1780. (*).

Le mémoire victorieux dont nous allons rendre compte eſt diviſé en deux parties. La premiere contient une Analyſe de la formation des voyelles, & la ſeconde des Principes pour conſtruire des tuyaux d'orgue qui imitent la voix humaine & ſpecialement les ſons voyelles.

L'Auteur commence par une deſcription ſuccinte des Organes de la voix humaine, de la trachée artère

b 3 par

(*) Cette Diſſertation a été imprimée ſéparement ſous le titre: *Chriſtiani Theophili Kratzenſteinii* Tentamen reſolvendi Problema ab Academia Scient. Imp. Petropolitana ad annum 1780 publice propoſitum et in publico Academiae conuentu die 19 Septembris Praemio coronatum.

par laquelle l'air paſſe & repaſſe dans les poumons; du Larynx ou du canal court & cylindrique qui eſt à la tête de la trachée; de l'Epiglotte, de ce cartilage mince & mobile, qui couvre la glotte ou la petite fente du Larynx &c. Il diſcute d'abord l'action & la modification de chaque organe pour produire des ſons articulés en général & il paſſe enſuite à la formation de ceux qu'on nomme voyelles. Il obſerve ici que le ſon de la voix eſt modifié & chargé en un ton en paſſant 1.) dans la glotte plus ou moins fermée par l'épiglotte, de là 2.) dans la voute entre le palais & la langue 3.) à travers les dents qui ſe ferment plus ou moins par le mouvement des machoires & enfin 4.) en ſortant par l'ouverture que forment les lèvres. Chacune des ces quatre modifications contribue ſa part à la formation des voyelles & chaque voyelle exige une certaine diſpoſition de ces ouvertures & cavités dont l'auteur donne les dimenſions telles, qu'il les a déterminées avec beaucoup de ſagacité par pluſieurs expériences.

Après cette analyſe ſuivent des diſcuſſions ſavantes & judicieuſes ſur la nature des vibrations de l'air dans la formation des voyelles. L'auteur apprécie d'abord les ſentimens divers des Anatomiſtes ſur la production de ce mouvement vibratoire dans l'air: il croit que l'Organe de la voix humaine a un grand rapport avec les flûtes, & il prouve cette reſſemblance par une trachée-artère artificielle, dont il enſeigne la conſtruction & qui produit des ſons ſemblables à la voix humaine. Une telle trachée-artère artificielle ſe trouve auſſi à l'Inſtrument que notre Auteur couronné a envoyé à l'Académie.

Mais

Mais quelle diverſité dans les vibrations de l'air même doit on ſuppoſer pour conſtituer le caractere diſtinctif & eſſentiel des voyelles? Ce n'eſt pas la vîteſſe de ces vibrations: une différence de vîteſſe ne fait que rendre le ton plus ou moins grave, plus ou moins aigu ſans en changer la nature vocale. Outre cette vîteſſe, l'auteur fait remarquer encore trois variétés qui peuvent avoir lieu dans le trémouſſement ondulatoire & ſonore de l'air; l'intervalle entre les ondes vibrantes, leur figure, & l'interſection mutuelle de leurs parties par les réflexions qu'elles ſouffrent dans la cavité de la bouche; & il fait conſiſter le caractere diſtinctif des tons vocaux dans la figure des Ondes vibrantes. Il ſe repréſente le ton d'une voyelle lorsqu'il ſort de la bouche comme ayant la figure d'un cone, dont le ſommet ſe trouve dans la glotte: les quatre modifications ſusmentionnées en ſont des Sections perpendiculaires à l'axe. L'Auteur leur donne une figure elliptique & fait dépendre toute la diverſité des tons vocaux du rapport des ſes deux axes entr'eux, rapport qu'il détermine pour chaque voyelle.

Suit la ſeconde partie, que l'auteur ingénieux conſacre à la partique. Il y perfectionne les anches ordinaires dans le jeu d'orgues connu ſous le nom de la voix humaine, & il enſeigne la figure qu'il faut donner aux tuyaux pour produire le ſon d'une voyelle quelconque propoſée. Il ſe ſert, pour la plupart des voyelles, de cones ou pyramides renverſées de diverſes amplitudes, & l'inſtrument qu'il a fait conſtruire d'après ces principes, & qu'il a envoyé à l'Académie Impériale a répondu à ſon attente & remporté le ſuffrage unanime des Commiſſaires.

RÉ-

RÉFLEXIONS
SUR LES SATELLITES DES ETOILES,
présentées à l'Académie & lues dans son Assemblée publique le 19 Septembre; en présence de S. A. R. Msgr. le Prince de Prusse.

par
M. *NICOLAS FUSS.*

Le Siècle où nous vivons, si remarquable à tant d'égards, dans l'Histoire civile, politique & littéraire, ne l'est pas moins par sa fertilité en inventions, propres à favoriser l'avancement des Sciences en général & de l'Astronomie en particulier. Les Arts mécaniques ont porté enfin les Instrumens que cette partie sublime de nos connoissances exige, à un point de perfection dont on n'eut pas même l'idée dans les siècles passés; & par là ils ont prêté des secours si nombreux aux Observateurs du Ciel, qu'on ne doit point être surpris, de les voir mettre au jour des découvertes proportionnées à l'importance de ces nouvelles ressources.

D'abord la belle découverte que l'illustre *Euler* à qui la Théorie de l'Astronomie doit tant de progrès, fit

il y

il y a trente ans, sur la cessation de couleurs de l'Iris, dans les Télescopes à réfraction, par l'emploi de différens milieux transparens, ne fut pas un des moindres services qu'il rendit à l'Astronomie pratique, puisque cette idée engagea M. *Dollond* à l'enrichir des Lunettes acromatiques. La diminution de la longueur excessive des ces instrumens, qu'on obtint par la nouvelle Théorie de M. *Euler*, sans perdre du côté du grossissement, n'étoit pas moins propre à augmenter & la facilité d'observer & la justesse des Observations. Enfin le perfectionnement du Pendule, du Quart-de-cercle, du Micromètre, &c. dut mettre le comble à la précision moderne & aux espérances qu'on étoit en droit de se former après la réunion de tant de puissans secours.

Aussi la suite a-t'elle justifié ces attentes. Si l'on n'on n'a pas vu beaucoup de nouvelles merveilles, on a vu les anciennes avec plus d'assurance, on les a observées avec plus de précision, ce qui vaut bien des découvertes, puisqu'elles en résultent. D'ailleurs, si ces succès n'ont pas toujours été également éclatans, il ne faut pas oublier, que c'est l'effet de la succession naturelle des découvertes, proportionné à la gradation des moyens d'en faire. Avant que d'observer moyennant des Lunettes de dix, de huit pieds & de moindre longueur, il avoit falu manier succesivement des machines de deux-cens, de cent & cinquante, de cent pieds; avant que d'obtenir le quart-de-cercle mural, perfectionné, comme il l'est aujourd'huy, on s'étoit servi de celui que Tycho imagina. La connoissance des faits avance en raison du perfectionnement de ces organes artificiels: celle des causes la suit; mais rarement d'un pas égal. Souvent elle dévance les faits,

faits, & voilà une autre ſource du rapprochement des degrés ſur l'echelle de nos connoiſſances, qui nait des efforts heureux de ces Génies privilégiés, dont l'imagination, vive mais réglée, brillante mais docile, guidée par des faits ſimples & familiers, en ſaiſit les rapports, & preſſent des loix, grandes comme la Natures même, mais qui, par cette grandeur, ne peuvent être verifiées, que lorsque le temps & un concours de circonſtances ſavorables ſe réuniſſent pour en faciliter la confirmation à ceux que la Nature a élus pour cet effet; car c'eſt elle qui, ſe choiſit des confidens, dignes, par leur ardeur à la conſulter, de penétrer ſes myſtères; c'eſt elle qui fixe les époques des grandes découvertes & qui en prépare les moyens. Telle fut, pour ne remonter que jusqu'au grand *Newton*, la démonſtration de l'applatiſſement de la Terre, confirmée longtemps après par les voyages des Académiciens de Paris; & la découverte des loix du mouvement des corps céleſtes, par l'Hypothèſe de la gravitation univerſelle, conſtatées par une infinité de faits. Telle fut auſſi l'application heureuſe du mouvement progreſſif de la lumière à l'aberration des étoiles, faite par *Bradley*, & confirmée depuis par le plus parfait accord de l'effet calculé avec les obſervations; ſans parler d'une infinité d'autres.

Affermir par des obſervations plus exactes de pareilles vérités, pour ainſi dire preſſenties; corriger les anciennes, qui ſe reſſentent de l'imperfection des inſtrumens; rectifier les hypothèſes, à qui elles ont donné naiſſance; en abolir d'autres que la nature dénie; en bâtir des nouvelles ſur des faits nouveaux: voilà l'éternelle alternative des efforts de l'eſprit humain & le tableau fidèle

de

de ſes opérations; voilà le meilleur emploi, que l'Aſtronomie moderne puiſſe faire des reſſources dont je viens de parler.

Mais elle commence même à tirer encore un meilleur parti de la perfection des inſtrumens, ſi l'on en croit les découvertes qu'on nous annonce de Mannheim d'une manière capable d'exciter l'attention de toute la République des Lettres. M. l'Abbé *Mayer*, un des plus intelligens & des plus infatigables Obſervateurs, muni de tous les ſecours que l'art peut fournir à l'Aſtronomie, & doué de tout le zèle que les encouragemens d'un Prince généreux peuvent inſpirer, prétend en avoir fait au Ciel à l'aide de ſon grand Quart-de-cercle mural, qui, ſurtout ſi les concluſions qu'il en a déduites étoient fondées, ne manqueroient pas de faire époque dans l'Hiſtoire de l'Aſtronomie. Il a non ſeulement découvert une grande quantité de nouvelles étoiles, pour la plupart télescopiques, dans le voiſinage des principaux aſtres connus; mais il a remarqué auſſi à la plupart de ces étoiles ſecondaires une variété d'éclat & de couleur, & un changement de poſition, rélativement aux étoiles principales, qui, indépendans, à ſon avis, de tous les mouvemens connus des étoiles fixes, lui parurent ſuffiſans, pour leur attribuer un mouvement propre, régulier & périodique; en un mot, pour ſoutenir que chacune de ces petites étoiles ſe tourne autour de ſon aſtre principal, de la même manière que les Planètes ſe tournent autour du Soleil.

Voilà ſans contredit une explication, plus frappante encore que le fait même, quelque étrange qu'il puiſſe

paroître; mais M. *Mayer* va encore plus loin dans la ſuite, en tâchant de démontrer, que pluſieurs de ces nouvelles étoiles ſont des corps opaques, uniquement viſibles par les rayons empruntés de leurs Soleils reſpectifs; qu'elles ſont par conſéquent les vrayes Planètes des étoiles fixes, apartenantes à des Syſtèmes de mondes ſemblables au nôtre, dont l'aſtre principal & le centre commun eſt le Soleil.

Que l'on juge de l'étonnement qu'a du faire naître une découverte, non ſeulement importante en elle même, mais accompagnée de concluſions, dont le titre même, & l'adoption du nom de Satellites pour ces nouvelles étoiles, annonça toute l'étendue. Les Planètes des étoiles fixes, qui n'avoient exiſté jusqu'ici que dans l'imagination des Philoſophes, nourrie par l'Analogie de nôtre Syſtème planétaire, exaltée par la contemplation de ſes merveilles, commenceroient-elles à exiſter réellement pour nous? Cette exiſtence conjecturale, dont la démonſtration paroît être hors de la portée de nos Organes, munis de tous les ſecours de l'art, ſeroit-elle prouvée par des faits? Voilà à quoi aboutit le détail des obſervations mentionnées, qui ont été ſi ſouvent repétées qu'on ne ſauroit douter ni de la vérité des Phénomènes, ni de l'exactitude de l'Obſervateur, dont l'habileté doit inſpirer la plus grande confiance. Il n'y a que les concluſions qu'il s'eſt trop haté d'en déduire, qui me paroiſſent repréhenſibles, de même que la dénomination de ces nouvelles étoiles, qui a jetté dans l'erreur M. l'Abbé *Hell* & pluſieurs autres perſonnes, & qui a attiré à M. *Mayer*, de la part du dernier, quelques ſorties déſagreables, qu'il a repouſſées avec autant de vigueur que d'amertume.

La

La nouveauté de l'objet, & fon importance, m'engagent à préfenter à cette illuftre Affemblée quelques réflexions, propres à répandre plus de jour fur ces prétendus Satellites; à diffiper les erreurs, que M. *Mayer* pourroit avoir fait naître dans cette efpèce d'Enthoufiasme très pardonnable, qui préfide à la naiffance des brillantes hypothèfes; à faire voir l'impoffibilité, de découvrir jamais les vrayes Planètes des étoiles fixes, entant que ce font de corps opaques; à pefer les raifons, qui ont pu déterminer cet Aftronome à prendre fes nouvelles étoiles pour telles, quoique ce fuffent de corps lumineux; fans méconnoître au refte ce qu'il y a de réel dans ces découvertes, auxquelles on ne fauroit contefter fans injuftice ni le mérite de la nouveauté ni celui de l'importance.

D'abord il faudra convenir non feulement de la poffibilité, mais de la probabilité même des Syftèmes de mondes analogues au notre. Rien de plus naturel, de plus vraifemblable, que la conjecture affés répandue, que cette infinité de corps brillans, dont la voute célefte eft parfemée, & qu'on regarde depuis longtemps comme autant de Soleils, rayonnans d'une lumière propre & native, foyent environnés de corps opaques, femblables au globe que nous habitons & à ceux qui l'avoifinent, comme d'autant de Planètes, qu'ils ont affujetties au devoir de parcourir, en vertu des loix éternelles & immuables du mouvement, les carrières tracées par celui qui leur a donné l'exiftence. Quel pourroit être le but de ces foyers immenfes de chaleur & de lumière, fi ce n'eft de répandre l'une & l'autre fur une infinité de corps qui en font privés; de vivifier, comme l'aftre qui nous echauffe & nous éclaire,

 d'au-

d'autres mondes, au centre desquels le *Créateur* les a placés? Rien, je le repéte, de plus conforme aux vues très ſages de *Celui* qui a marqué l'Univers entier de l'empreinte de ſa divinité, que cette concluſion d'une aſſociation de mondes que nous connoiſſons, à d'autres que nous ne pouvons que deviner, d'après les faits que la Nature, jalouſe de ſon économie myſtérieuſe, nous a laiſſé entrevoir. Rien de plus digne de la grandeur de l'Etre ſuprême, que cette brillante penſée, qui doit nous pénétrer d'admiration, par l'idée complette de l'infinité, à la quelle l'imagination ſuccombe.

Mais pourſuivons l'Analogie, d'après les faits qui la favoriſent. Dans le groupe des Mondes, dont nôtre Syſtème eſt compoſé, il n'y a qu'un ſeul corps eſſentiellement lumineux, placé au centre de ſeize globes obſcurs, & répandant de tous côtés la lumière & la chaleur qui lui eſt tombée en partage. Suppoſons donc à cette infinité de Soleils qui nagent dans l'abyme de l'eſpace, des aſſemblages de mondes pareils, & nous ne ferons que rendre juſtice à la Nature, qui travaille partout ſuivant le même plan. Mais ſeroit-il poſſible que nous puſſions jamais voir ces corps obſcurs, placés à une diſtance auſſi immenſe? Seroit-il en notre pouvoir de vérifier leur exiſtence par l'obſervation? Ce ſeroit le triomphe de l'adreſſe humaine; mais je le crois beaucoup au-deſſus de notre pouvoir & de tous les ſecours que nous pourrons jamais tirer des organes artificiels.

Pour juſtifier ce ſentiment plaçons le Soleil, qui nous apparoît à ſa diſtance actuelle ſous un diamètre d'environ

viron deux mille secondes, près de Sirius, la plus brillante, & probablement la plus proche des étoiles fixes, qui, à une distance, pour le moins deux-cens-mille fois plus grande, n'a qu'un point pour diamètre apparent. A cette distance prodigieuse, quoique trop petite encore, le Soleil n'auroit plus que la centième partie d'une seconde, ou bien la quinze-millième partie d'une ligne pour diamètre. On a de la peine à concevoir, que ce point imperceptible, qui seroit éclipsé par la trois-centième partie d'un cheveu, puisse rayonner jusqu'à nous. Que sera-ce donc, si aulieu d'un globe immense de feu, tel que le Soleil, nous concevons à côté de Sirius un corps opaque qui, pour n'être visible qu'à ses plus proches voisins, aye besoin des rayons empruntés de cet astre, lequel par son éloignement immense nous est lui-même presque imperceptible? Jugeons par le résultat de cette supposition, s'il est probable qu'un corps obscur, fût-il plus grand que le maître de nôtre Systême, puisse nous envoyer ses rayons empruntés, désunis & diminués dans ce trajet immense, pour lequel il leur faut plus de trois ans, malgré la vitesse inconcevable de la lumière. Seroit-il possible qu'un instrument qui, à en juger par les mesures, ne peut guères grossir les objets au-delà de cent fois, ait assés de force, pour nous représenter ce que nous ne verrions pas, comme je ferai voir dans la suite, par une lunette de quatre-mille fois de grossissement?

Pour faire sentir encore d'avantage l'impossibilité absolue de voir les Planètes des étoiles, je vais supposer à Sirius, à Arcturus, à Regulus, ou à toute autre étoile de la première grandeur, une Planète qui égale nôtre Soleil

en

en volume, à la diſtance de 3000 de ſes diamètres ſeulement, pour ne rien forcer dans mes ſuppoſitions. Donc, puisque le Soleil, reculé à une diſtance deux-cens-mille fois plus grande, n'a plus qu'un centième de ſeconde pour Diamètre, la Planète de la même grandeur nous paroîtra éloignée de ſon Soleil de 30 ſecondes. Or on trouve par un calcul fondé ſur les principes de Photométrie, qu'un corps opaque de ce diamètre, ſitué à cette diſtance du corps lumineux qui l'éclaire, en reçoit un degré de lumière, qui eſt à celui de l'étoile comme l'unité eſt à cinq cens ſoixante & ſeize millions (*a*): c'eſt à dire que la lumière de la Planète ſera 576 millions de fois moindre que celle, dont nous voyons briller les étoiles de la première grandeur, en prennant le dernier terme de toutes les meſures & les ſuppoſitions les plus déſavantageuſes à notre ſentiment.

Pour

Fig. 1.

(*a*) Soit la Terre en T, l'étoile fixe en E & la Planète en P; le demi-diamètre de la Planète $= a$, la lumière de l'étoile fixe $= L$ & celle de la Planète $= l$, & en faiſant uſage des formules que M. *Euler* a données dans un mémoire rempli des plus profondes recherches: *Sur les divers degrés de lumière du Soleil & des autres corps céleſtes*, inſéré dans le VI. Vol. des Mémoires de Berlin, on trouve

$$l : L = aa\,TE^2\,((PE+PT)^2 - TE^2) : 32.PT^3.PE^3.$$

Analogie, qui dans le cas préſent, où $PT = TE$, fournit pour la lumière de la Planète

$$l = L\,\frac{a\,(PE+2TE)}{32.TE.PE^2},$$

ou bien, puisque PE eſt très petit par rapport à 2TE, on pourra le négliger dans le numerateur, de ſorte que

$$l = \frac{Laa}{16\,PE^2},$$ où il y a $a = \frac{1}{2}$ & $PE = 3000$.

Pour soulager l'imagination, confondue par des nombres aussi énormes, & pour lui faire saisir de plus près ce degré de lumière, dont il est difficile de se former une idée assés claire, quoiqu'on voie bien en gros, qu'il est infiniment petit, nous allons comparer la lumière que nous venons de trouver pour notre Planète, avec celle d'une bougie ordinaire, en cherchant la distance, où il faudroit placer celle-ci, pour que sa flamme nous luise du même éclat. Nous partirons d'abord d'une expérience de M. *Bouguer*, par laquelle il a trouvé, que la lumière d'une bougie, placée à la distance de 16 pouces, est égale à celle du Soleil, à l'élévation de 30 degrés au-dessus de l'horizon, diminuée dans la raison de 1 à 11664; & en conséquence de ce résultat, en exprimant le degré de lumière du Soleil par un billion, celle de la bougie, vue de la distance de 16 pouces, sera exprimée par 85,734,000. Donc, puisque la clarté décroît en raison du quarré des distances, (*b*) il sera facile d'assigner en nombres le degré de

(*b*) Dans un passage de la réponse de M. *Mayer* à la Critique de M. *Hell*, où il veut soutenir par des raisons d'Optique, que ses petites étoiles sont de vrayes Planètes, il a étrangement mésentendu M. *Euler*, en croyant que, quoique la clarté d'une bougie allumée décroisse en raison du quarré des distances, il n'en soit pas de même de la lumière des corps célestes, puisque leurs rayons passent par l'éther & n'y perdent rien sur leur passage. (*Gründliche Vertheidigung der Fixstern-Trabanten. pag. 241.*) Il est vrai que ce sont là les propres paroles de M. *Euler*, dans le Mémoire cité: mais ce n'en est pas le sens. Il parle d'une diminution indépendante de celle qu'on sait se faire en raison du quarré de l'espace parcouru. Car il observe que, si les rayons ont a traverser un milieu plus grossier que l'éther, ils souffrent en-

de lumière de la même bougie, vue à telle diſtance qu'on voudra; & réciproquement on trouvera la diſtance, à laquelle il faudra la placer, pour qu'elle jette un degré de lumière donné; (c) où le nombre qu'on adopte pour exprimer l'éclat naturel du Soleil, & que nous avons mis égal à un billion, eſt abſolument indifférent, puiſque toutes les autres meſures ſe rapportent à ce nombre, comme à une echelle commune. Mais pour achever nôtre comparaiſon il faudroit connoître le rapport, qu'il y a entre l'éclat du Soleil & celui des étoiles de la première grandeur. Or puiſqu'en déterminant l'éclat de Jupiter, moyennant la formule de la note pag. 23. on le trouve égal à 58 de ces unités dont la lumière du Soleil contient un billion, 40 en pourront ſuffire pour les étoiles de la première grandeur, dont aucune n'égale Jupiter en éclat.

En adoptant ce nombre, puiſque nous avons trouvé la lumière de la Planète 576 millions de fois plus foible, elle

encore un autre affoibliſſement aſſés ſenſible dans les grandes diſtances, & que cela pourroit bien ſe faire auſſi dans l'éther, quelque délié qu'il fût. Il diſtingue ſoigneuſement cet affoibliſſement de la diminution connue (*Mem. de Berlin. T. VI. pag. 282.*), le néglige, & trouve enfin, dans le paſſage qui a ſéduit M. *Mayer*, qu'il n'eſt pas ſenſible.

(c) Soit la lumière d'une bougie placée à la diſtance d'un pied $= \lambda$, celle de la même bougie placée à n pieds de diſtance $= \lambda'$, il y aura $\lambda' : \lambda = 1 : nn$. En connoiſſant donc la clarté que la bougie répand à un pied de diſtauce, on trouvera celle qu'elle jette à une diſtance quelconque n, par la formule: $\lambda' = \frac{\lambda}{nn}$. Et pour connoître la diſtance, où il faut la placer pour qu'elle rende un degré de lumière donné, on ſe ſervira de l'expreſſion: $n = \sqrt{\frac{\lambda}{\lambda'}}$.

elle ſera égale à $\frac{1}{14,400,000}$, & la bougie dont la lumière répandue à la diſtance de 16 pouces eſt de 85,734,000, (ce qui pour la diſtance d'un pied donne 152,400,000), devra être placée à la diſtance de 46,850,000 pieds, ou bien à la diſtance de 2000 Miles d'Allemagne, pour que ſon éclat devienne égal à celui de cette Planète.

Il eſt donc de la dernière évidence, que cette Planète, égale à nôtre Soleil en grandeur, & éloignée du ſien de 30 ſecondes ſeulement, ne ſauroit nous être viſible en aucune façon. Car ſuppoſons que la flamme d'une bougie ordinaire puiſſe être vue de l'oeil nud, pendant la nuit, à la diſtance d'un demi-Mile d'Allemagne, pour découvrir cette Planète il faudroit avoir un Téleſcope dont le groſſiſſement ſurpaſſât 4000; force dont nos inſtrumens les plus parfaits ſont encore extrèmement éloignés, & que l'art n'atteindra probablement jamais (*d*). Car une lunette acromatique, douée de ce degré de groſſiſſement, exigeroit un triple objectif de plus de 13 pieds de diamètre & de plus de 80 pieds de longueur; ce qui prouve, à n'en plus douter, l'impoſſibilité de découvrir jamais les Planètes des étoiles. Combien plus ce raiſonnement doit-il valoir, ſi ces corps obſcurs ſont de moindre volume, ou plus éloignés du corps lumineux qui les éclaire,

 que

(*d*) Bien entendu ſi l'on veut allier l'avantage d'une viſion diſtincte à celui de ces grands groſſiſſemens; car M. *Herſchel*, à qui l'Aſtronomie eſt redevable de la découverte de la nouvelle Planète, doit avoir exécuté un Téleſcope à réflexion qui groſſit 6000 fois les objets, mais qui ne les repréſente que fort confuſement.

que je n'avois ſuppoſé? Quelles concluſions enfin en tirer pour les Planètes des ordres inférieurs des étoiles, qui certainement ſont ou plus éloignées ou plus petites, ou l'un & l'autre, ou enfin d'un degré moindre de lumière native? Dans tous ces cas nos doutes ſur leur viſibilité, ſi nous en avions encore, ſe convertiroient en la plus parfaite certitude pour la négative, puisque chacune de ces circonſtances tend à diminuer plus ou moins la lumière de la Planète.

Or s'il eſt impoſſible de découvrir les corps opaques, dont les étoiles fixes ſont probablement entourées, il eſt décidé que les étoiles nouvelles, découvertes par M. *Mayer* à côté des principaux aſtres, mais qui ſont pour la plûpart beaucoup plus éloignées de leurs prétendus maîtres, que nôtre Planète imaginaire ne l'a été ſuppoſée du ſien, ſont des corps eſſentiellement lumineux, contre le ſentiment de M. *Mayer*, qui s'efforce de ſauver leur opacité à différentes repriſes. (*e*).

Pour rendre cette inviſibilité encore plus manifeſte, et même pour des cas allégués par l'Auteur même, nous n'avons qu'à conſidérer le plus proche Satellite *a* d'Arcturus, qui, ſuivant M. *Mayer*, eſt de la dixième grandeur, d'une lumière pâle & planétaire & éloigné d'Arcturus de 26 minutes d'après la table. En ſuppoſant à cette petite étoile un diamètre égal à celui du disque ſolaire, c'eſt à dire d'un centième de ſeconde, ſa diſtance d'Arcturus ſera égale à 156000 de ces diamètres. La formule de la note, pag. 23.,

(*e*) *Gründliche Vertheidigung der Fixſtern-Trabanten*, *pag.* 110, 111, 115, 127, *&c.*

25., appliquée à ce cas, donne la lumière de ce Satellite à celle d'Arcturus comme 1 : 1, 400, 000 millions. Donc en ſuppoſant l'éclat d'Arcturus 140, c'eſt à dire trois fois plus grand que celui de Jupiter dans ſes oppoſitions, la lumière du Satellite ſera égale à $\frac{1}{10,000,000,000}$, c'eſt à dire égale à l'éclat d'une bougie, placée à la diſtance de 60000 Miles d'Allemagne. Par conſéquent ce Satellite ſeroit abſolument inviſible en qualité de corps obſcur, & à plus forte raiſon tous les autres que M. *Mayer* a attribués à cette étoile.

Auſſi paroît-il avoir prévu en quelque façon la force des objections qu'on pourroit lui faire contre l'opacité de ces étoiles ſecondaires; car loin de démordre de ſon ſentiment, il croit pouvoir les affoiblir par la réflexion, que ces Satellites peuvent être des Comètes qui, en s'écartant après leur paſſage au Périhélie de leurs Soleils, pourroient dans des orbites extrèmement excentriques, s'approcher aſſés ſenſiblement du nôtre, pour nous être viſibles pendant quelque temps. J'avoue que cette conjecture pourroit favoriſer le ſentiment de M. *Mayer*, & l'apparition & diſparition ſucceſſive de quantité de ces nouvelles étoiles paroît venir à ſon appui. Mais en l'examinant de plus près, on voit d'abord, que de toutes ces prétendues Comètes aucune ne ſauroit s'approcher ſenſiblement de nous que dans l'hypothèſe absolument inſoutenable, que les grands axes de leurs orbites paſſent à peu près tous ſans exception par nôtre Syſtème, & que leur Aphélie ſoit, pour ainſi dire, ſur ſes frontières. (*f*)

(*f*) De toutes ſes Comètes dont les orbites nous ſont connues, les axes ſont certainement moindres que le diamètre de l'orbite terreſtre, pris

Enſuite en accordant même cette ſuppoſition, il eſt évident, par les concluſions que nous venons de former pour les corps opaques en général, qu'une Comète, étant inviſible dans ſa plus grande proximité du Soleil qui l'éclaire, le ſera à plus forte raiſon, lors qu'elle s'en éloigne pour s'approcher du nôtre. En regardant par exemple le corps obſcur, que nous avons placé ci-deſſus à la diſtance de trois mille de ſes diamètres, comme une Comète dans ſon Périhélie (*g*), puisque ſa lumière, à peine égale à celle d'une bougie, vue à la diſtance de 2000 Miles d'Allemagne, décroît en raiſon du quarré de ſa diſtance au corps lumineux qui l'éclaire; il eſt évident que, loin de gagner en éclat par ſon approche, ſon degré de lumière diminuera au contraire de plus en plus (*h*), à moins qu'on ne veuille ſuppoſer

pris cent fois. Celle de 1769 calculée par M. *Lexell*, eſt tout au plus deux-cens fois plus grande, quoique ſon temps périodique, à en juger par les élémens, tels qu'ils me ſont parvenus, eſt de plus de trois mille années, de ſorte que ce paroît être une de celles qui s'éloignent le plus de nôtre Syſtème.

(*g*) On pourroit m'objecter ici, que la Comète dans ſon Périhélie pourroit être beaucoup plus près de ſon Soleil, & en être éclairée au point de nous devenir viſible dans cette poſition. Je n'en disconviens pas: mais de toutes les étoiles ſecondaires, nouvellement découvertes, aucune ne ſe trouve dans ce cas, vu qu'elles ſont à plus de 30 ſecondes de diſtance de l'aſtre dont elles pourroient emprunter la lumière. D'ailleurs il eſt démonſtrativement vrai, que le corps opaque ſuppoſé de la grandeur du Soleil, nous ſeroit encore inviſible, ne fût-il éloigné de l'étoile principale que de 100 des ſes diamètres, diſtance qui, rapportée à celle où nous ſommes des étoiles de la première grandeur, répond à une ſeconde ſeulement.

(*h*) L'augmentation de lumière, que les petites étoiles prennent pour la plupart, après leur première apparition, ſuivant les obſervations de M.

poſer qu'il vienne dans ſon Aphélie aſſés près de nôtre Syſtème, pour être éclairé par le Soleil, au point de nous être viſible pendant quelque temps ſous l'apparence d'une de nos propres Comètes; ſuppoſition déſtituée, comme nous avons vu dans la note précédente, de toute probabilité, & qu'on verra ne pouvoir tendre non plus à l'avantage de l'hypothèſe en queſtion. Car le même corps nous ſera certainement encore inviſible, lors même qu'il ne ſera pas plus éloigné de nôtre Soleil que de 100000 de ſes diamètres, la lumière qu'il en reçoit alors étant de $\frac{1}{320000}$, c'eſt à dire égale à celle d'une bougie, placée à 350 Miles d'Allemagne de diſtance (*i*). En s'approchant d'avantage, il pourroit bien rayonner enfin jusqu'à nous; mais il ne nous paroîtroit jamais ſous la forme de ces petites étoiles. Il ſe jetteroit dans la ſphére d'activité du Soleil, & s'il n'en ſubiſſoit pas l'aſſujettiſſement, il cauſeroit, en vertu de ſon volume, (que nous ne pouvons ſuppoſer moindre, ſans perdre ſur la lumière, qui eſt en raiſon

---

M. *Mayer*, & qui lui parut devoir venir à l'appui de la prétendue opacité, eſt donc ouvertement contraire à cette hypothèſe, & ſert à conſtater la lumière propre des étoiles en queſtion.

(*i*) Soyent S, T, C, les lieux du Soleil, de la Terre & de la Comète, & en appliquant la formule: Fig. 2.

$$\frac{l}{L} = \frac{aa\,TS^2\,((CS + CT)^2 - TS^2)}{32.\,CS^3.\,CT^3}$$

à la figure 2, on pourra mettre $CS = CT$, pour avoir

$$\frac{l}{L} = \frac{aa\,TS^2\,(4\,CT^2 - TS^2)}{32\,CT^6}$$

& en négligeant TS^2, très petit à l'égard de $4\,CT^2$, la formule ſe reduira à $\frac{l}{L} = \frac{aa\,TS^2}{8\,CT^4}$, où l'on met pour le cas préſent $a = \frac{1}{2}$; $TS = 100$; $CT = 100000$.

raiſon du quarré de ſon diamètre,) un dérangement, jusqu'ici inconnu, dans le mouvement des corps qui compoſent notre ſyſtème. Enſuite ſon diamètre apparent, qui à cette diſtance de 100000 diamètres eſt déjà de deux ſecondes, & partant incomparablement plus grand que celui des plus groſſes étoiles, augmenteroit en raiſon de ſon rapprochement, tandis que celui des petites étoiles, qu'on veut nous donner pour de pareilles Comètes, eſt ineſtimable, & beaucoup plus petit que le diamètre des étoiles de la première grandeur. Enfin le mouvement d'une Comète ſi voiſine — en général toute ſon apparence ſeroit ſi différente de celle que nous préſentent les étoiles ſecondaires, que nous ne ſaurions les confondre en aucune manière.

Il me paroît décidé en vertu de toutes ces réflexions, qu'il eſt impoſſible, même ſous les ſuppoſitions les plus favorables, que les nouvelles étoiles de M. *Mayer* puiſſent être des Comètes des étoiles fixes; & en les liant aux réflexions que nous avons rapportées plus haut contre la viſibilité des Planètes, nous ſerons obligés de nous départir entièrement de l'opinion en faveur d'un Planètisme parfait, & d'avouer, qu'en qualité de corps opaques, ſoit Planètes ou Comètes, ces nouvelles étoiles nous ſeroient abſolument inconnues.

Après avoir rempli de cette façon le premier & le principal point de l'objet que j'avois en vue, il ne me reſte qu'à examiner les raiſons, qui ont pu déterminer M. *Mayer* à ſoutenir un mouvement de révolution de ſes étoiles ſecondaires, dont je viens de démontrer la lumière propre. Ici l'état de la queſtion change de face.

Je convins de l'exiſtence des Planètes des étoiles, entant qu'opaques, mais je démontrai leur invifibilité: pour les Satellites lumineux, je ne ſaurois ſoutenir celle-ci; mais j'héſiterois d'accorder leur exiſtence, par les raiſons ſuivantes, que je ne donne que pour une ſuite de doutes, bien ou mal traités, mais qui me paroiſſent mériter quelque attention; puiſque, ſans pouvoir paſſer pour démonſtrations rigoureuſes, elles ne laiſſent pas de diminuer la probabilité d'un Planétisme ſemblable.

D'abord à quoi bon ces révolutions des corps lumineux autour de leurs ſemblables? Les Planètes en ont bien beſoin pour être retenues dans leurs Orbites, pour jouir de la lumière & de la chaleur du corps lumineux qui en eſt le centre & le foyer, mais qui eſt unique dans le Syſtème que nous connoiſſons. Ici le Soleil, qui eſt le ſeul agent du mouvement de notre globe & de ceux qui l'avoiſinent, en eſt en même temps la ſource unique, où ils puiſent tous la lumière & la chaleur. Là il y auroit des Syſtèmes entiers de Soleils, maîtriſés par d'autres qu'ils égalent ou ſurpaſſent peut-être en éclat & en volume. Leur voiſinage & leur mouvement ſeroient ſans but & leurs rayons ſans utilité, puiſqu'ils n'ont pas beſoin d'emprunter d'un corps étranger, ce qu'ils ont reçu eux-mêmes en partage, ni de répandre la lumière & la chaleur ſur des corps opaques qui n'exiſtent pas, ou qui, s'ils exiſtent, peuvent les recevoir également du maître du Syſtème. Si l'aſtre principal n'eſt fait que pour retenir un groupe de Soleils, quel eſt le but de ſa lumière? Si les étoiles ſecondaires ſont des corps lumineux, quel eſt le but de leur mouvement? Il eſt vrai que le raiſonnement pour

ou contre la vérité de quelque fait de la nature que ce puisse être, fondé sur les causes finales, est bien trompeur quelques fois; mais l'Analogie même qui nous a mené des Planètes de notre Système à celles des Systèmes étrangers, nous abandonne ici. La nature, *dont les principales loix sont générales pour les êtres de même espèce*, ne nous offre aucun fait semblable. C'est bien une conséquence assés naturelle, quoique peu nécessaire, du mouvement propre observé à la plûpart des étoiles de la première grandeur: qu'elles se tournent autour d'un corps central, qui maîtrise toutes les associations des corps célestes. Mais ne confondons pas ce mouvement général, supposé qu'il ait lieu, avec la révolution particulière d'un groupe de corps autour d'un astre quelconque, déduite de quelques Phénomènes, qui paroissent admettre tant d'explications plus naturelles, que nous n'avons pas besoin de recourir à ce Planétisme. L'idée en peut flatter l'imagination, toujours disposée à saisir de légers rapports & à franchir les frontières des réalités, mais ses fantaisies ne tiennent pas toujours contre un examen plus froid & plus refléchi.

Les principaux Phénomènes, par lesquels M. *Mayer* s'efforce de démontrer le mouvement périodique orbiculaire de ses nouvelles étoiles sont: 1°) leur proximité de l'astre principal; 2°) l'apparition subite de plusieurs d'entre-elles à côté des étoiles plus grosses, qui avoient paru d'abord solitaires; 3°) la variation de lumière & de grandeur apparente de ces mêmes étoiles & de quantité d'autres; 4°) le changement de distance & la variation de déclinaison & d'ascension droite de ces étoiles secondaires

&

& de leurs étoiles principales. Je vais examiner, si la démonstration, fondée sur ces Phénomènes, est assés solide & concluante, pour mettre le Planétisme dont il s'agit au-dessus de toute contestation.

Quant au prémier Phénomène, on a déjà objecté à M. *Mayer* que cette proximité pourroit bien n'être qu'apparente, & que la distance de deux étoiles qui ne paroissent éloignées l'une de l'autre que de peu de secondes, est peut-être plus grande que celle de Sirius à la Terre, sur-tout si elles sont de grandeur & de clarté différentes. Les Astronomes croyent communement que les étoiles les plus brillantes sont aussi les plus voisines de nôtre *Système*, & que le moindre degré de lumière & de grandeur des ordres inférieurs est une marque assés spécieuse de leur plus grand éloignement. Ceci est d'autant plus probable, qu'on ne sauroit s'imaginer que toutes les étoiles soient à la même distance, comme ont fait autrefois les Grecs, à moins de mettre des bornes à l'immensité de l'Univers. M. *Mayer* rejette ce sentiment qui détruiroit entièrement son hypothèse, puisqu'il renferme, comme toutes les conjectures, un *peut être*. Et parce que peut-être les étoiles secondaires sont de moindre volume que les principaux astres, voisins en apparence, & qu'elles peuvent par conséquent n'être pas plus éloignées de nous que les grandes étoiles, non-obstant leur petitesse & la foiblesse de leur lumière, il bâtit une partie de sa démonstration sur cet autre peut-être, qui n'est gueres plus probable.

Quand même nous voudrions accorder à ce raiſonnement toute la ſolidité qu'il n'a pas, nous verrions que, non-obſtant cette égalité de diſtance de nôtre globe, il y a encore, parmi les étoiles nouvellement découvertes & annoncées comme Satellites, quantité de corps dont la diſtance à l'étoile principale eſt beaucoup trop grande, pour qu'on puiſſe croire que leur mouvement, réel ou apparent, ſoit l'effet de l'action de la plus groſſe étoile, & un vrai mouvement de révolution.

En rapportant par exemple la diſtance de Saturne au Soleil, qui eſt à peu près de mille diamètres ſolaires, au fond de l'Olympe, où nous avons placé les étoiles de la premiere grandeur, nous avons remarqué ci-deſſus que le Soleil, vu de cette diſtance, n'a plus qu'un centième de ſeconde pour diamètre apparent. Sa diſtance au dernier des corps ſoûmis à ſon empire, ſeroit vue ſous un angle de dix ſecondes, tandis que parmi les Planètes lumineuſes que M. *Mayer* a données à Arcturus, il y en a qui ſont à $2^{\circ}, 30'$, $2^{\circ}, 40'$, jusqu'à $2^{\circ}, 55'$ de diſtance de cet aſtre, c'eſt à dire de 900,000, de 960,000 jusqu'à 1,050,000 diamètres ſolaires. Peut-être en eſt-il de même de quantité d'autres Satellites, attribués à Sirius, à Procyon, à l'α de l'Aigle, à la Luiſante de la Lyre, &c. Et ſi nous conſidérons que les demi-axes des Orbites ſuppoſées de ces Satellites, ſont néceſſairement plus grands que ces diſtances obſervées, & peuvent bien égaler le tiers, ou même la moitié de la diſtance à la Terre, nous pourrons en conclure, que ces étoiles ſecondaires, fuſſent-elles réellement à la même diſtance de nous que l'aſtre principal, peuvent très bien ſubſiſter à

cette

cette distance de lui, & à plus forte raison dans un plus grand éloignement, sans en subir l'assujettissement, & que le Planétisme, fondé sur ce Phénomène, n'est pas de nécessité absolue; à moins qu'on ne veuille supposer que l'action d'Arcturus surpasse de plus de mille fois celle du Soleil, ce qui n'auroit pas l'ombre de probabilité. Car supposons l'éclat naturel d'Arcturus égal à celui du Soleil, & sa lumière apparente même aussi brillante que celle de Jupiter dans ses oppositions, son diamètre apparent est tout au plus d'une tierce (*k*), & ne surpasse par conséquent que de la moitié celui du Soleil placé à la même distance. Le changement de position, observé à ces étoiles, paroît donc provenir d'une tout autre source que d'un pareil mouvement de révolution (*l*), & si, outre le Planétisme, il y a une cause capable de produire ce changement, réel ou apparent, elle peut valoir aussi pour expliquer les changemens de toutes les autres étoiles secondaires moins éloignées de l'astre principal.

Enfin, si le plus grand éloignement de ces petites étoiles n'est pas l'unique cause de la différence de grandeur & de lumière vis-à-vis des étoiles plus grosses, il pourra du moins l'être en partie, ou seul ou combiné avec leur moindre

(*k*) J'ai déjà remarqué ci-dessus, pag. 26. que la lumière de Jupiter dans ses oppositions est à celle de Soleil comme 58 est à un billion. Le quarré du diamètre apparent de l'étoile, égale à Jupiter en éclat, sera donc au quarré du diamètre apparent du Soleil, comme 58 est à 1000000000000; donc le diamètre d'Arcturus $= \frac{1}{65}'' = 1'''$, à peu près.

(*l*) Il provient ouvertement du mouvement propre d'Arcturus, & démontre précisément le contraire de ce que M. *Mayer* en veut conclure.

volume. Probablement même il en est ainsi d'un grand nombre d'étoiles pareilles; & dans l'un & l'autre cas le Planétisme, loin d'être de nécessité absolue, n'est pas même possible. D'où il est clair que la partie de la démonstration du mouvement de révolution, fondée sur ce Phénomène, n'est rien moins que solide & concluante.

L'apparition subite de quelques unes de ces nouvelles étoiles paroît venir plus essentiellement à l'appui de l'Hypothèse de M. *Mayer*. Inexplicable par le mouvement annuel de la Terre, puisque ces étoiles paroissent encore les mêmes à six mois d'intervalle; inexplicable aussi par la Théorie de l'aberration de la lumière, puisque les altérations qui en résultent sont régulières, M. *Mayer* ne trouve d'autre expédient, pour rendre raison de ce Phénomène, que de le déduire du mouvement de l'étoile dans une orbite extrèmement excentrique, autour de l'étoile principale.

Sans parler de l'inconséquence du raisonnement, par lequel il s'efforce d'écarter l'effet de la Parallaxe & de l'aberration, dont la première, combinée avec l'autre & avec le mouvement propre de l'étoile principale, pourroit très bien produire de temps en temps des occultations irrégulières en apparence, M. *Mayer* ne parle-t'il pas lui même de la difficulté de découvrir ces petites étoiles de lueur pâle, même par les instrumens de la plus grande force, afin d'excuser les Astronomes, de ce qu'ils ne les ont pas vues avant lui? Cette difficulté ne pourroit-elle pas fournir des explications plus naturelles? L'état de l'Atmosphère, celui de l'instrument & de l'oeil même varie, & le nombre

de

de ces obſervations, faites ſur la même étoile, eſt beaucoup trop petit, pour qu'on puiſſe entièrement rejetter tout effet du hazard, toute influence phyſique ou optique (*m*). Au reſte, en parlant du Phénomène ſuivant, il ſe préſentera une explication aſſés ſimple qui lui eſt commune avec celui-ci.

La variation de couleur, de grandeur & de lumière eſt le troiſième Phénomène, dont la démonſtration du Planétisme eſt étayée. Pareillement inexplicable, par la progreſſion ſucceſſive de la lumière, & par l'Hypothèſe de M. de *Maupertuis* (*n*), M. *Mayer* recourt de nouveau aux orbites excentriques des prétendus Satellites pour en rendre raiſon. Je ne veux pas revoquer en doute la vérité du fait, quoique l'illuſion, du moins pour ce qui regarde la différence obſervée entre ces petites étoiles & les étoiles téleſcopiques ordinaires, pourroit y avoir plus de part qu'on ne penſe. Mais en accordant même le prétendu mouvement périodique autour de l'aſtre principal, je ne vois pas comment il pourroit expliquer le Phénomène d'une manière ſatisfaiſante. Car après avoir démontré la lumière propre des corps en queſtion, il eſt de la plus gran-

(*m*) Les obſervations d'α d'Hercule en peuvent fournir un exemple fort frappant.

(*n*) M. de *Maupertuis* dans ſon *Discours ſur les différentes Figures des Aſtres*, regarde les étoiles fixes comme des corps plus ou moins aplatis, & croit que l'action que les Planètes qui l'environnent, exercent pendant leur paſſage au Périhélie, puiſſe faire changer de face & diminuer ou augmenter la lumière de l'aſtre, ou le faire évanouir entièrement pendant quelque temps, lorsqu'il préſente le trenchant de ſon diſque (*Oeuvres de M. de Maupertuis*. T. 1. p. 148.)

grande évidence, que le rapprochement & l'éloignement successif de l'étoile, mue dans l'orbite même la plus allongée, est beaucoup trop petit par rapport à nous, qui en sommes à une distance si prodigieuse, pour que l'augmentation & la diminution de lumière qui en résulteroit, puisse nous devenir sensible. De l'autre côté, pour que le passage d'un degré à peine perceptible de lumière, à la clarté des étoiles de la cinquième & sixième grandeur, observé par exemple à l'étoile secondaire du γ d'Andromède & d'α d'Hercule, vienne réellement d'un pareil rapprochement, il faudroit qu'il eût produit en même temps une différence dans la distance & la position de ces astres secondaires & de leurs étoiles principales, incomparablement plus grande qu'elle n'a été observée. Or si le Planétisme n'explique pas le fait en question, ou qu'il ne l'explique que d'une manière aussi forcée, la démonstration, fondée en partie sur ce Phénomène, perdra encore de ce côté de sa solidité.

Nous pourrions nous contenter, d'avoir montré, d'où cette variation de lumière ne vient pas: ajoutons cependant encore quelques mots sur les sources, d'où elle pourroit venir. Mr. *Mayer* rejette l'Hypothèse de M. de *Maupertuis*, (*o*) puisqu'il ne trouve pas qu'elle explique, comment une étoile, invisible pendant cent années ou d'avan-

(*o*) Il paroît avoir mésentendu cet Auteur, qui n'attribue pas tant le changement de face des ses étoiles aplaties à une rotation réguliere, qu'à un dérangement, causé par l'action de l'une ou de l'autre de ses Planètes sur son passage au Périhélie. l. c.

vantage (*p*), a pu paroître tout d'un coup & changer dans l'espace d'un an sa lumière, ternie lors de l'apparition, contre un éclat de plus en plus vif; & puisqu'il suivroit de cette explication, qu'après l'intervalle d'une année l'étoile reprendroit son ancienne pâleur, contre l'expérience. Pour moi, il me semble, que cette ingénieuse hypothèse, adoptée même par plusieurs Astronomes du premier rang (*q*), explique très bien l'alternative irrégulière d'éclat & de ternissement, & même la disparition totale & périodique, sans renfermer la conclusion d'un retour annuel régulier, puisque le déplacement de ces Soleils aplatis peut être l'effet tantôt de l'une, tantôt de l'autre de leurs Planètes, dont les Périodes seront naturellement de durée différente (*r*). C'est au contraire le Planétisme qui exigeroit un tel retour périodique à l'ancien état de ternissement, que M. *Mayer* dit être contraire aux observations.

Mais sans nous arrêter à défendre cette conjecture, quelque admissible qu'elle puisse être, ne pourrions nous pas adopter une autre explication, que nous présente la considération des taches solaires, & qui a déjà été pro-

po-

(*p*) J'aimerois mieux dire: *pendant 20 années:* car il n'est pas étonnant, qu'on n'aye pas vu ces étoiles avant la découverte des lunettes acromatiques. V. la lettre de M. *Maskelyne* à M. *Mayer* insérée dans l'ouvrage du dernier: *De novis in coelo sidereo Phaenomenis. p. 12. et gründliche Vertheidigung. etc. p. 85.*

(*q*) *Instit. Astronomiques par M. le Monnier. pag. 68.*

(*r*) *Bailly Discours sur les corps lumineux.*

posée, du moins en partie, par *Riccioli* (*s*) & *Bouillaud* (*t*), pour rendre raison de l'apparition & disparition des étoiles, en supposant qu'il y en ait dont la surface ne soit pas également lumineuse & qui puissent nous présenter tantôt leurs parties obscures, tantôt les lumineuses. Effectivement les taches qui ont terni quelques fois si considérablement l'éclat du Soleil, & qui paroissent être inséparables de cette masse énorme en fusion, nous autorisent à en supposer à tous les corps essentiellement lumineux. Or ces parties obscures, plus ou moins abondantes sur le disque de ces étoiles, qui par leur éloignement infini ne nous paroissent plus que comme des points sans étendue mesurable, ne pourront-elles pas altérer considérablement leur grandeur & leur lumière apparentes, les augmenter & les diminuer successivement par la rotation plus ou moins lente de l'étoile, ou, si la régularité de cette cause nous choque, par l'existence passagère des taches mêmes, qui par leur changement de place, par leur augmentation & diminution en nombre & en grandeur, peuvent non seulement produire la variation d'éclat & de grandeur du troisième Phénomène, mais encore la disparition totale & la réapparition du Phénomène précédent. On conçoit bien, au reste, que pour produire ce dernier effet, il n'est pas nécessaire que les taches occupent toute la surface du disque: il suffit qu'elles ternissent sa lumière au point que nos instrumens les plus exquis n'ayent plus assés de force pour nous découvrir ces étoiles, quoique nous pus-

sions

(*s*) *Almageste du P. Riccioli. Tom. II. pag. 176.*
(*t*) *Ism. Bulialdi monita ad Astronomos.*

ſions les voir par des téleſcopes doués d'un plus haut degré de groſſiſſement.

Mais ce qui paroit devoir mettre le comble, de l'avis de M. *Mayer*, à la ſolidité de ſa démonſtration, c'eſt: 1°. Que quelques unes de ſes petites étoiles n'ont pas changé de poſition vis à vis de l'étoile principale, depuis le temps de *Flamſtead*, quoique celle-ci ait changé de place en conſéquence de ſon mouvement propre obſervé par quelques Aſtronomes; 2°. Que d'autres étoiles, au contraire, ont changé réellement de poſition reſpective, ſoit qu'on regarde l'aſtre principal comme fixe au non. Du premier de ces Phénomènes il conclud que la petite étoile ſuit la plus groſſe dans ſa marche; &, ne pouvant expliquer l'autre fait, ni par la préceſſion, ni par le ſeul mouvement de l'étoile principale, il le rejette en partie ſur le mouvement propre de la petite étoile, qui dans l'un & l'autre cas ſera donc le Satellite de la plus groſſe & ſe tournera autour d'elle, puiſque, comme il dit, ce mouvement ne peut être qu'orbiculaire.

Il étoit d'autant plus néceſſaire, d'inſiſter ſur la dernière concluſion arbitraire, que celle qui ſe déduit immédiatement des deux faits obſervés, pourroit démontrer tout-au-plus, que les petites étoiles ont auſſi un mouvement propre, ce qui eſt encore bien éloigné du Planétisme. Mais j'avoue, que je ne vois pas trop bien, pour quelle raiſon ce mouvement, ſuppoſé qu'il fût réel, doit néceſſairement être orbiculaire, ni pourquoi, ſuppoſé qu'il le fût, il ſe feroit autour de l'étoile plus groſſe. La plûpart des Aſtronomes ſe doutoient, il y a longtemps, que

les petites étoiles pouvoient être soûmises aux mêmes dérangemens qu'on a observés jusqu'ici à quelques unes de la première grandeur, quoique moins sensibles, à cause de leur plus grand éloignement; & ce mouvement, qui peut très bien exister, sans prononcer en faveur du Planétisme, n'est rien moins que décidé par les deux derniers Phénomènes.

Car sur quoi ces Phénomènes se fondent-ils? Sur la connoissance fort imparfaite que nous avons du mouvement propre de quelques étoiles; sur l'ignorance absolue, où nous sommes à l'égard de l'existence de ce mouvement dans la plûpart des autres; & sur la précision des anciens Observateurs, dénués des ressources des Astronomes modernes.

Quant au mouvement propre des étoiles, nous n'en connoissons exactement ni la quantité ni la direction. Peut-on prétendre connoître au juste la première, pour quelque étoile que ce soit? Peut-on soutenir qu'elle soit la même tous les ans, si l'autre nous est cachée encore, si le mouvement n'est pas rectiligne, si nous en ignorons les causes & les loix? On n'a qu'à citer pour exemple Arcturus, dont le mouvement est des plus sensibles & des mieux connus. Or quelle différence dans les opinions sur sa quantité annuelle! *Cassini* l'avoit trouvée de 1'', 80; Mr. le *Monnier* de 2'', 20; *Halley* de 1'', 10 & M. *Mayer* lui assigne avec M. *Maskelyne* 2'', 01. Voilà donc quatre résultats, tous différens entre eux, tous fondés sur la comparaison d'anciennes observations. En prêtant une confiance égale à celui de *Halley* & de M. le *Monnier*; & mul-

multipliant la différence, qui eſt 1", 10, par 1900, nombre d'années écoulées depuis *Hipparque*, on trouve qu'on eſt incertain de près de 40 minutes ſur le lieu qu'Arcturus occupoit dans ce temps-là. Telle eſt la confiance que méritent les concluſions fondées ſur la quantité du mouvement propre des étoiles, pour les cas même où il eſt le plus ſenſible.

Cependant la démonſtration du mouvement propre de quantité des petites étoiles nouvellement découvertes eſt de cette nature. Pour déterminer, par exemple, la quantité de ce mouvement pour le Satellite d'Arcturus, connu de *Flamſtead*, M. *Mayer* multiplie le mouvement annuel d'Arcturus en latitude, trouvé par M. *Maskelyne*, par le nombre d'années écoulées depuis Hipparque, & il trouve qu'Arcturus auroit du être dans ce temps là plus ſeptentrional de 1, 6. Or, puiſque *Halley* (qui par des raiſons, faciles à deviner, diffère de M. *Maskelyne* dans la quantité du mouvement annuel d'Arcturus) ne trouve que 1800 x 1", 10 = 33 minutes pour la diminution de ſa latitude depuis *Hipparque*, M. *Mayer* en conclud, que le Satellite de *Flamſtead* s'eſt rapproché d'Arcturus de plus d'un demi degré en 1800 ans (*v*). Quelle concluſion! On pourroit démontrer de la même manière que notre Syſtème planétaire s'eſt éloigné des étoiles fixes de plus de 14 mille fois depuis *Kepler*, ou que le Soleil a été 17 fois plus près de la Terre dans le temps de ce grand homme, puiſqu'il avoit cru un jour que le diamètre de Sirius étoit de 4 minutes & le rayon du grand orbe de

 700

(*v*) *Gründliche Vertheidigung der Fixſterntrabanten*, *pag.* 186.

700 diamètres, tandis que nous estimons actuellement l'un d'une tierce & l'autre de douze mille diamètres de la Terre.

Il en est de même des autres changemens les plus considérables de position respective. Toujours la démonstration, par laquelle on prétend prouver qu'une partie de ce changement est causée par le mouvement particulier de la petite étoile, est fondée sur la comparaison d'anciennes observations, qui doivent nécessairement se ressentir de l'imperfection des instrumens, & différer d'autant plus de celles de M. *Mayer*, que son appareil est d'une justesse particulière. On n'a qu'à comparer entre-eux les différens Catalogues des étoiles fixes, pour se convaincre que les observations de *Flamstead*, dont M. *Mayer* se sert le plus, n'ont pas toujours la précision qu'il leur suppose (*x*) ; & les Astronomes lui sauront meilleur gré, de les avoir corrigées en partie, que de la démonstration du Planétisme, fondée sur leur prétendue exactitude.

D'autres variations enfin ont été déduites de la comparaison d'observations, plus récentes à la vérité, où par conséquent cette incertitude n'a pas lieu ; mais elles sont si peu sensibles, que la moindre erreur, dont le plus habile Astronome, pourvu des meilleurs instrumens, ne sauroit toujours se garantir, peut avoir la même influence sur les conclusions.

D'ail-

(*x*) Je pourrois appuyer cette assertion de l'autorité de plusieurs Astronomes, qui sont du même sentiment. V. *Histoire de l'Astronomie moderne par M. Bailly.* T. II. *pag.* 651. *Institutions astronomiques par M. le Monnier, Introduction, pag. ljjj. &c.*

D'ailleurs la propagation succeſſive de la lumière, combinée avec le mouvement annuel de la Terre, peut très bien concourir à expliquer des changemens auſſi petits dans la poſition & la diſtance de deux étoiles voiſines en apparence, ſoit que les ellipſes d'aberration s'entrecoupent ou non. Car quoique cet effet ſoit d'une régularité que les obſervations n'indiquent point, il peut être modifié par le mouvement propre, trop peu connu, de la plus groſſe étoile, & par d'autres mouvemens apparens.

L'effet de l'aberration peut même ſervir à expliquer des changemens aſſés conſidérables dans la diſtance & la poſition de deux étoiles voiſines, ſur-tout ſi l'une eſt de la première ou ſeconde grandeur & l'autre à peine viſible par les inſtrumens de la plus grande force, tels que ſont la plûpart des prétendus Satellites. Concevons, pour le faire voir, deux étoiles E & E', peu diſtantes, en apparence, l'une de l'autre, mais dont l'une E ſoit de la première ou ſeconde & l'autre E' de la dixième ou donzième grandeur, deſorte que la diſtance de celle-ci à la Terre en B, ſavoir E' B, puiſſe être cenſée infiniment plus grande que la diſtance de la première E B. Si nous ſuppoſons que la force & la viteſſe des rayons, lancés des deux étoiles, ſouffre une plus grande diminution pendant le trajet immenſe de E' en B que de E en B (y), l'inter-

Fig. 1.

(y) On ſuppoſe ordinairement que la viteſſe inconcevable de la lumière reſte toujours la même, & ſi les obſervations paroiſſent le confirmer, c'eſt qu'elles n'ont été faites juſqu'ici que ſur des objets voiſins en comparaiſon de ceux dont nous parlons. Mais lorsqu'il s'agit d'un chemin de 10, 50, 100, & plus d'années, que la

tervalle C B, que le rayon parti de l'étoile E parcourt, pendant que la Terre avance dans son orbite par l'espace A B, sera plus grand que l'intervalle C′ B, que le rayon plus affoibli, parti de l'étoile plus éloignée E′, parcourt dans le même temps. Donc, l'effet de l'aberration étant qu'on voie l'étoile E′ dans la direction B D′, parallèle à A C′, & l'étoile E dans la direction B D, parallèle à A C, l'angle C B D, qui est l'aberration de l'étoile E, sera moindre que l'angle C′ B D′, aberration de l'autre étoile E′; & la distance apparente des deux étoiles, ou l'angle E B E′ pourra varier de l'angle D B D′.

Cette différence peut monter dans beaucoup de cas jusqu'à plusieurs secondes, & elle est d'autant plus grande que la différence dans les distances des deux étoiles & dans la vitesse de la propagation est considérable. Supposons par exemple que les rayons partis de l'étoile E′ employent

la lumière des étoiles fixes de tous les ordres peut avoir à parcourir, la supposition d'une uniformité permanente dans la fréquence des vibrations & dans leur véhémence ou dans la vitesse de la propagation des rayons de lumière, me paroît être destituée de toute Probabilité, quoiqu'en dise la Théorie. La différence de couleur semble déposer contre l'uniformité de la fréquence des vibrations, & celle de la lumière contre la permanence de la force des rayons. Il en pourroit être de même de la vitesse de la propagation, quelle que soit l'élasticité de l'Ether, d'autant que son uniformité n'est fondée que sur l'Analogie de la lumière & du son; qu'il n'existe aucun fait pour la prouver, & que même M. *Euler* a démontré, qu'elle dépend en partie de la fréquence des vibrations; qu'elle est plus grande, lorsque leur nombre est plus grand, & plus petite, lorsque leur nombre est plus petit. Voyés *Conjectura physica de propagatione soni ac luminis.* §. *XVIII. & seqq.*)

ployent 9 minutes à parcourir le demi-diamètre de l'orbite terrestre, tandis que les rayons de l'autre étoile E le parcourent en 8′, en mettant la vitesse du mouvement de la Terre $= \alpha$, celle de la lumière de l'étoile E sera $= 10480\,\alpha$ & celle de la lumière de l'autre étoile E′ $= 9320\,\alpha$. Et puisque la Terre avance dans son orbite par un arc de $39\frac{1}{3}$ secondes, pendant que les rayons de l'étoile E parcourent le diamètre de cette orbite; & par un arc de $44\frac{1}{4}''$, pendant que ceux de l'étoile E′ font le même chemin: nous voyons, qu'en ne donnant à la vitesse des rayons de l'étoile E′ qu'un neuvième de diminution de plus qu'à celle des rayons de l'étoile E, les diamètres des ellipses d'aberration des deux étoiles peuvent différer de près de cinq secondes, & c'est d'autant que la distance des deux étoiles peut varier dans certains cas. En supposant que les rayons E′B parcourent en dix minutes l'espace que les rayons EB parcourent en huit, la différence des diamètres des ellipses d'aberration est de 10 secondes (z).

Cet effet sera encore périodique; mais il seroit superflu de remarquer que sa régularité peut être altérée par le mouvement trop peu connu de l'étoile E, & par d'au-

(z) Jusqu'ici l'aberration observée n'a pas excédé de beaucoup les 40 secondes que *Bradley* lui avoit assignée d'après sa Théorie & ses observations; mais on n'a pas fait attention non plus aux petits étoiles. M. *Mayer* a été le premier à s'en occuper avec quelque persévérance, quoique dans une intention toute différente. Son travail pourra avoir un jour le sort de tant de spéculations, qui ont conduit à des vérités qu'on ne cherchoit pas, tandis que celle qu'on avoit en vue, se refusoit à toutes les recherches.

d'autres dérangemens négligés, qui influent sur la variation de distance, de déclinaison & d'ascension droite, surtout lorsqu'elle est aussi petite que la plûpart des variations, qui affectent les étoiles nouvellement découvertes, dont les irrégularités peuvent très bien n'être qu'apparentes & suivre des loix qu'on découvrira dans la suite, à mesure que le nombre des observations augmentera & comprendra des intervalles de temps plus considérables.

Quoiqu'il en soit de cette idée; il est évident par les réflexions précédentes, que le mouvement propre des petites étoiles peut être admis, sans que cela nous oblige d'adopter aussi le Planétisme, mais que ce mouvement, quelque probable qu'il soit en lui-même, n'est pas une suite absolument nécessaire du quatrième Phénomène. Et il est étonnant que M. *Mayer* insiste tant sur la réalité de ce fait, & qu'il tâche de le rendre si sensible; attendu qu'en supposant ce mouvement particulier des petites étoiles tant-soit-peu considérable, la nouvelle méthode, de trouver par leur moyen les loix du mouvement des grandes étoiles & sa quantité, perdroit tout son mérite; puisque ce n'est que dans la supposition d'un repos parfait des étoiles secondaires, ou d'un changement de place entièrement insensible, que leur découverte peut devenir d'une utilité réelle pour l'objet en question.

* * *

Rassemblons ce que nous venons de dire sur les Satellites des étoiles. Nous avons fait voir par un raisonnement fondé sur des expériences, sur des principes d'Op-

d'Optique & des calculs, & fur des fuppofitions enfin très-avantageufes à l'hypothèfe que nous allions combattre, que les petites étoiles nouvellement découvertes par M. *Mayer* à côté d'autres étoiles plus grandes, ne font pas, comme il a cru, des corps opaques, ou de vrayes Planètes, puisqu'en cette qualité elles nous feroient abfolument invifibles. Nous avons démontré enfuite, qu'en qualité de Comètes elles ne pourroient pas, comme on auroit pu fuppofer, s'approcher affés fenfiblement de nous, pour nous devenir vifibles, fans prendre un diamètre, un mouvement, en général une forme & des propriétés, qui les diftingueroient effentiellement de l'apparence des étoiles, telles que l'obfervation les préfentoit. Enfin nous avons parcouru les principaux Phénomènes, par lesquels M. *Mayer*, balançant entre un Planétisme parfait de corps obfcurs & un autre de globes lumineux, tâchoit de démontrer le dernier, en cas qu'on voudroit lui contefter l'autre. Nous avons fait voir en parcourant ces Phénomènes, que le mouvement de révolution eft contraire aux uns, qu'il ne fuit pas abfolument des autres. Et fi, dénués de faits fuffifans, nous n'avons pas été en état, de démontrer rigoureufement la non-exiftence de ce Planétisme de corps lumineux, on conviendra au moins que la prétendue démonftration, fondée fur les nouvelles obfervations, a perdu toute fa force, & que c'eft à jufte titre que nous renvoyons le mouvement orbiculaire d'un Soleil autour de fon femblable dans la claffe des fimples conjectures, à laquelle il avoit appartenu jusqu'ici.

RÉFLEXIONS

Sur les anciens travaux de mines qu'on trouve en Sibérie & ſur leurs raports avec ceux de Hongrie qui ſe diſtinguent des travaux Romains,

Mémoire deſtiné à la Séance que l'Académie Imperiale des Sciences préparoit pour Mr. le Comte de Falkenſtein;

par

Mr. *PALLAS.*

Dans toute la bande méridionale de la Sibérie l'on trouve des traces frequentes d'une population bien plus nombreuſe, que ne l'avait ce pays lors de ſa mémorable conquête par les Ruſſes. On n'y voit pas, à la verité, de ces ruines qui dans leurs décombres même ſont empreintes du faſte & de la magnificence de leurs anciens auteurs: ce ne ſont ni temples, ni théatres, ni aquéducs. Les traces des habitations ne ſont pas même marquées, ſi ce n'eſt par quelques rétranchements, que le génie de guerre a fait conſtruire & que le temps a presqu' effacé. Mais on y trouve des tombeaux d'une grandeur ſouvent prodigieuſe & tels que le reſpect ſeul pour la mémoire des ancêtres a pû exciter des nations barbares, toujours indolentes, à eriger avec les materiaux bruts que la Nature

ture leurs offrait & que le temps a respecté plus que la plûpart des productions de l'art qui nous restent des peuples cultivés de l'antiquité.

Ces tombeaux se trouvent partout dans le pays découvert qui regne le long des grandes chaines de montagnes limitrophes de la Sibérie. Nulle part leur nombre & leur grandeur n'est plus imposante, que sur les beaux coteaux entre les fleuves Abakân & Ouyôuss, le long du bord occidental du Yénisei & au pied des Alpes altaïques. En parcourant ces pays, surtout le voisinage du Yénisei, depuis sa sortie des gorges Sayanes, je n'ai pû m'empecher de penser à ces Scythes de Quinte Curce, qui défiaient le vainqueur de Darius de venir les attaquer prés des tombeaux de leurs ancêtres. — Le choix des lieux, les excellens paturages, le défaut de toute trace de maçonnerie ou d'autre habitation fixe, y annoncent, comme partout en Sibérie, des anciens peuples nomades, & le grand nombre de tombeaux très-considerables, raprochés & groupés, comme en cimetiéres, dans une étendue de pays très-mediocre, signale le Yénisei comme le siège principal de la force & de l'empire de ces anciens peuples, dont la mémoire n'existe plus en ces lieux & que les peuplades tatares, habitans actuels des environs, ne réconnoissent pas pour leurs ancêtres & ne savent pas même nommer.

Par l'examen qui a été fait de ces anciens tombeaux & par les fouilles fréquentes que des gens avides en ont fait sécretement (malgré les défenses émanées contre cet abus), on est parvenû à les classifier & à juger,

par la forme exterieure, de leur contenû & des espérances que les fouilleurs y peuvent fonder. Entre l'Irtiche & le Yénisei, & surtout dans les environs de ce dernier, on s'est assuré de deux classes de monuments trés-anciens, que plusieures circonstances semblent raporter à deux nations absolument différentes. Les tombeaux *d'une espéce*, qui semble la plus antique & dont on trouve aussi un grand nombre dans le pays découvert au delà du Lac Baïcal, mais presque point d'exemple à l'occident du fleuve Ob, sont entierement formés en pierre brute. On voit audessus de terre de grands enclos quarrés, bien orientés, faits avec de trés-grands quartiers de moëlon brut, qui ont été enfoncé par un de leurs bords en terre, outre une ou deux pierres étroites & longues, qu'on a placé comme des bornes droites ou inclinées à l'un ou l'autre coin du quarré, & qui s'élevent quelquefois de plusieures brasses au dessus de terre, portant souvant de grands masques mal sculptés ou des marques grossiéres, quelques figures d'hommes ou d'animaux tels qu'un homme, absolument ignorant de l'art de dessiner, traceroit sur la pierre. L'espace compris dans ces enclos de pierre, peut-être pour distinguer les sexes ou le rang, se trouve quelquefois uni, d'autrefois rélevé en bosse avec de la terre raportée; quelquefois il est pavé en moëlon. Les grands quarrés sont partagés en deux ou trois compartiments par d'autres rangées de moëlon, & le tout porte, au dessus de terre, une grande ressemblance aux anciennes sepultures des Germains, qu'on voit en quelques parties de l'Allemagne.

En

En fouillant la terre on rencontre ordinairement des ossements de cheval, puis un ou plusieurs petits caveaux grossiérement construits & récouverts en moëlon, ou les morts semblent avoir été placés sans cerceuils, mais avec leurs meubles & utensiles les plus nécessaires. L'état des ossements, qu'on trouve dans ces tombeaux en grande partie détruits, quoique dans un terrein sec & élevé, ne laisse pas douter de leur haute antiquité, & le peu de richesses en métaux que les fouilleurs en retirent ordinairement, annonce un peuple sans luxe & sans industrie. Ce n'est que dans les plus gigantesques de ces tombeaux, qui doivent étre attribués aux chefs & aux plus riches de la nation, qu'on a quelquefois trouvés des utensiles & des ornement en or & argent, mais trop artistement faits, pour ne pas les croire des productions étrangères à cette nation, acquises per le commerce ou le brigandage. D'ailleurs le fer qu'on découvre dans ces sépulcres, soit en armes ou en piéces de harnois, en fait une distinction bien essentielle d'avec l'autre classe qui doit fixer nôtre attention.

Les tombeaux de cette *seconde classe* se trouvent rarement melés aux prémiers, quelquefois voisins, mais plus ordinairement rassemblés en cimetières separés & éloignés des autres. Ils sont formés en tertres ou dunes de differente grandeur & élevation, avec du terrein pris dans la plaine, sans aucune trace de fosses ou tranchées dans le voisinage. Quelques uns de ces monuments de terre sont, à leur base, entourés de grands quartiers de roche plantés en terre. On les trouve assez rarement accompagnés de quelque pierre plus grande, grossièrement

sculptée

ſculptée en masque, ou marquée de quelques ſignes ou figures informes. Sous la terre accumulée, qui s'éléve ordinairement de deux ou trois, quelquefois même de quatre à cinq braſſes au deſſus du niveau de la plaine, ſur une circonférence de ſoixante à cent cinquante pas, on rencontre un ou plusieurs caveaux, ſouvent aſſez entiers, conſtruits en gros bois de meleze, ſemblables en charpente aux cabanes de village ruſſes & récouvertes en groſſes planches du même bois, avec des écorces de bouleau par deſſus. L'on ſait que ces deux matières végetales reſiſtent pendant des ſiécles à la pourriture & aſſurement on ne pouvait mieu choiſir les materiaux, aprés la pierre, que les auteurs de cette claſſe de tombeaux ſemblent avoir evité, par la raiſon qu'ils ignoroient la façon de la tailler & d'en former une maçonnerie bien clôſé; car d'ailleurs ils en avaient à leur portée tout près des endroits ou l'on trouve ces tombeaux, & on en trouve même quelquefois des quartiers, placés au lieu de toit, ſur les caveaux de bois.

Je n'entrerais pas ici dans tous les détails de la ſtructure intérieure de ces tombeaux, ou l'on remarque ſurtout une eſpéce de biére, ornée ſouvent de figures de bronze, laquelle ſemble avoir ſoutenûs les corps enterrés, & ou les autres ornements, ſurtout ces plaques de ceintures qui répreſentent groſſiérement differents animaux ſauvages, ſemblent indiquer un peuple chaſſeur &c. Mais il eſt eſſentiel de dire que c'eſt des tombeaux de cette eſpéce qu'on rétire, outre quelques petits ouvrages & quantité de lames trés-minces d'or battu, un trés-grand nombre d'inſtruments & d'utenſiles tous faits de cuivre

&

& d'airain. L'or & le cuivre travaillé qui provient de ces tombeaux, & dont une collection assez nombreuse est exposée au Cabinet de l'Academie, a des formes si particulières, est si grossiérement travaillé & se trouve en si grande quantité dans tous ces tombeaux, qu'on doit nécessairement en attribuer la fabrication à ce peuple même dont ce sont les monuments, lequel possedoit sans doute les moyens & l'industrie de se procurer les prémières matières de ces ouvrages en assez grande quantité pour ne pas dévoir les épargner dans les sépultures: car les tombeaux des plus pauvres ne sont presque jamais sans quelques piéçes des deux metaux indiqués, & les plus grands contiennent des quantités très-considerables d'or en lames, qui les fait réchercher par les fouilleurs. On ne peut aussi douter, que ce peuple n'ait absolument ignoré, ou du moins négligé l'usage du fer: puisque, malgré la prodigieuse quantité de mines de fer trés-riches aux environs du Yéniséi, tous leurs instruments tranchans, les haches, les couteaux, les dagues, les pointes de lances & de flêches, étoient faits d'airain. Les ouvrages d'argenterie sont tout aussi rares dans ces tombeaux que le fer, moins peut-étre par l'ignorance des moyens de le tirer de ses mines, que par le defaut de tout minerai qui en contienne dans ces environs.

On n'est pas embarassé pour concevoir d'ou cet ancien peuple, dont les monuments nombreux prouvent un long séjour dans les environs du Yéniséi, peut y avoir tiré son cuivre & son or: lorsqu'on pense aux frequentes traces d'anciennes mines qu'on a rencontré dans tout ce voisinage & partout ailleurs ou cette même na-

tion a laiſſé ſes monuments. Dépuis que l'induſtrie des Ruſſes a commencé à découvrir & à exploiter les tréſors ſouterreins que la nature liberale a preparé pour eux en Sibérie, on n'a presque pas entamé de filons, ni de dépots de minerais, ou ces anciens mineurs n'euſſent déjà tenté fortune; ou leurs travaux, à la verite peu profonds & peu opiniâtres, n'ayent laiſſé des traces bien evidentes, qui ont même ſervi d'indices à nos mineurs modernes. Mais on remarque partout que ces anciennes exploitations n'ont roulé que ſur des mines de cuivre faciles à gagner & à fondre, & ſur des ocres chargées de paillettes d'or. Partout où la roche eſt forte, les travaux ont été conduits ſuperficiellement, en effleurant pour ainſi dire la partie la plus expoſée des filons, que la dégradation du rocher & de la gangue avait amollie. Dans des couches moins refractaires ces anciens ont pénetré plus profondement & l'on a trouvé de leurs galeries, extremement reſſerrées & travaillées en rond, presque ſans ſupport & ſans charpente, jusqu'à des profondeurs de dix & de vingt toiſes. A la célébre montagne des ſerpents, la plus riche de nos mines en metaux précieux, on a trouvé de ces ouvrages profonds; on y a recueilli, comme je l'ai indiqué ailleurs (*a*), des hoyaux & autres inſtruments de mineurs, à peu près ſemblables à ceux qui ſont employés de nos jours, mais faits de cuivre; des maillets de pierre, aſſujettis par des ſangles à leurs manches de bois; enfin on y a retiré, du milieu des mines ocracées, le ſquelette d'un homme écraſé par l'éboulement, dont les os mineraliſés étoient accompagnés des outils d'exploitation dont il s'étaic

(*a*) Voyez mon *Voyage en Siberie Vol. II. p. 608.*

s'était servi & même d'une besaçe de cuir remplie des ocres les plus riches en or. Aussi la petite rivière qui coule au bas de cette montagne, a montré les traces du lavage que les anciens orpailleurs y avoient fait des ocres aportées de la montagne & on a relavé ces deblais pour en extraire, par un procedé mieu entendu, l'or qu'ils avoient negligé.

Dans les mêmes montagnes altaïques, où les anciens travaux des mineurs sont généralement trés-frequents, ainsi que sur le Yénisei, l'on rémarque aussi en maint endroit les scories & les traces de leurs fontes de cuivre, qui paraissent avoir été faites en petit, sans beaucoup d'appareil & d'art, dans de petites fournaises creusées en terre, & avec des creusets peu différents de nos pots ordinaires.

Plus vers l'occident entre l'Irtiche & le fleuve Oural (*Taïk*), particuliérement aux environs de la riviére Ischim, où les mines de cuivre abondent, l'on trouve, toujours à peu prés dans les mêmes latitudes entre 50 et 56°. ou sont généralement les plus belles terres de la Sibérie, des tombeaux semblables & force d'armes de cuivre, monuments de la même nation. On a rencontré les mêmes traces & les mêmes travaux de mines, à puits & galeries cylindriques, dans toutes les montagnes métalliques qui accompagnent la partie méridionale de la chaine ouralique & qui en forment les branches. Dans la riche mine de *Goumechefskoi*, qui fournit les plus célébres malaquites de l'univers, on a trouvé, à des profondeurs considérables, plusieures piéces d'habillements faits de peaux

 de

de chevreuil, des bois (jadis employés à l'exploitation) à demi mineralisés & incrustés de malaquite par les eaux cuivreuses, & des instruments de fouille qui indiquent le même peuple. A une autre mine (*Salgatchéi*) au Sud d'Orenbourg l'on découvrit, dans l'ancienne galerie, non seulement des ossemens humains & des débris de creusets en forme de pots, faits avec une glaise blanche; mais aussi des culots ronds de cuivre qui avaient été fondus dans ces pots. Mais dans tous ces cantons, les tombeaux attribuables à cette nation sont si clairsemés, qu'on peut en induire que son sejour n'y a été que passager. Ils sont plus frequents dans les belles campagnes sur le Samara & formés à peu prés comme sur le Yéniséi, les caveaux quelquefois construits en briques, qui indiquent un certain progrés de culture. Partout les ouvrages de cuivre & l'or en lames, qu'on y trouve, indiquent la présence du même peuple. On y remarque encore, comme de l'Irtiche au Yéniséi, quelques buttes de pierres sculptées avec des masques humains, lesquelles, ainsi que les tombeaux en dunes, sont encore bien plus frequents dans tout le désert qui régne d'ici vers la mer noire, sans s'étendre pourtant le long du Volga, dans les landes arides qui ont été autrefois les basses de la mer caspienne, & semblent ne pas avoir eu d'attrait pour ce peuple.

Toutes ces traces d'anciennes exploitations & fontes de cuivre & d'or, la présence des mêmes metaux presque tous seuls dans les tombeaux d'une certaine espéce, sur les mêmes lieux, le cuivre employé seul pour les instruments d'exploitation retrouvés dans les vieilles fouilles & pour tous les outils tranchants retirés de ces tombeaux;

beaux; les instruments de mineurs même découverts dans de tels tombeaux (*); tout celà indique, que les anciennes mines en Sibérie & les autres sépulcres de la seconde espéce doivent leur origine à une même nation. A l'orient du Yéniséi on ne retrouve presque plus les unes & les autres, d'ou il est naturel de conclure que ce peuple n'a pas habité au delà. Mais lorsqu'on peut tracer ces mêmes monuments, par les latitudes indiquées, jusqu' à la mer noire; il me semble alors qu'on ne peut se refuser d'admettre que cette nation, après avoir longtemps habité les plaines du Yéniséi, poussée par des guerres ou conduite par l'amour du gain, s'est portée en force vers nôtre Occident, en suivant l'enchainement de toutes les montagnes métalliques où elle a laissé ses traces, & par sa migration a fait place à d'autres hordes qui ont succedé plus tard. Tout comme ces habitans encore plus anciens des bords du Yéniséi, auxquels je crois pouvoir attribuer les tombeaux de pierre de la prémiére classe, avaient probablement cédé à ce peuple plus industrieu, en donnant peut-être l'impulsion aux prémiéres hordes, qui vinrent inonder l'Empire d'orient. Car il est assez prouvé, que la plûpart des Barbares qui ont guerroyé contre cet Empire, sont

 venus

(*) Il est trés-rémarquable & conduiroit peut-être à quelque découverte historique touchant le progrés de l'art des mineurs en Europe, qu'on rétire fréquemment des tombeaux aux environs du Yéniséi une espéce de crosses, de figures variées, qui avoient été fixées sur des batons, dont les restes sont visibles, du moins par la spirale d'or battû, dont ils ont été entourés. Ces crosses ont une réssemblance frapante avec celles que les mineurs de Saxe & de Bohème portent les jours de fête, dont le baton est ordinairement entouré d'un filet d'argent en spirale & qui sont connûes sous le nom allemand de *Berg-hakel*.

venus du vaste fond de l'Asie, laquelle s'est depeuplée par ces migrations que les historiens modernes sont assez sages pour ne plus déduire (comme il était assez ordinaire autrefois) du petit récoin de terre situé par le Nord des mers noire & caspienne, lequel n'était proprement que le théatre, ou ces Barbares commencoient ordinairement à se faire connaitre des Grecs.

Mais quel a été ce peuple si industrieu à réchercher & à exploiter les plus riches Mines dans cette prodigieuse étendue de terres qu'il a parcourue, depuis le Yéniséi jusqu'aux confins de l'Europe, prés desquels nous l'avons conduit? — Peut-être ne sera-t-il pas si difficile à découvrir, du moins par conjecture, lorsque j'aurais satisfait à deux points, qui m'ont principalement engagé à faire ce résumé sur les monuments, deja exposés ailleurs (*), de cet ancien peuple. C'est prémiérement, de m'expliquer sur l'application que Mr. *Bailly*, d'aprés quelques extraits tirés de mes voyages, a crû pouvoir en faire à ses Atlantes; En second lieu, c'est d'exposer le raport plus vraisemblable qu'ont, avec nos antiques exploitations de Sibérie, certaines anciennes mines, assez fréquentes en Hongrie, qui s'y font distinguer sans peine des travaux Romains, & qui semblent avoir eu pour auteurs cette même nation qui a disparue en Sibérie.

Mr.

(*) En differents endroits de mes Journaux de Voyages.

Mr. *Bailly* dans ses Lettres sur l'Atlantide de *Platon* &c. (*) me cite comme garant de l'existence d'un ancien peuple civilisé en Sibérie qu'il voudrait faire considerer comme une peuplade de ces Atlantes célebrés par Lui comme prémiers inventeurs des Sciences & instituteurs du genre humain, & que non content d'avoir d'abord placé sur le Sélengha, il a été en dernier lieu, d'hypothése en hypothèse, jusqu'à faire venir du Pole arctique. Si cet auteur célébre n'avait pas été aussi loin, & s'il eut donné à la patrie des ses Atlantes un peu plus de latitude vers le Sud, en les raprochant des Bramanes si justement pronés par Mr. *de Voltaire*, on n'aurait pas tant de peine à trouver son systême vraisemblable, même sans croire à la prétendue ignition de nôtre globe, dont la matière altérable au feu récusera toujours une origine solaire, & à cette incandescence primitive que des Philosophes Scythes (selon (**) *Justin*) ont debité avant Monf. le Comte *de Buffon*. Mais avec toute concession possible, il ne me seroit jamais venû dans l'esprit, de prendre les tombeaux que j'ai observé en Sibérie & dont nôtre célébre Historiographe Mr. *Müller* a parlé avant moi, pour des monuments d'un peuple avancé dans les arts & les sciences; bien moins encore pour les restes d'une antiquité aussi reculée qu'on devra donner au peuple Atlante de Mr. *Bailly*. — Il est bien vrai, que les travaux de mines trouvés

(*) Lettres sur l'Atlantide de *Platon* & sur l'ancienne histoire de l'Asie, pour servir de suite aux Lettres sur l'origine des sciences, addressées à Mr *de Voltaire*, par Mr. *Bailly* (à Londres & à Paris 1779. 8.) p. 273. & suiv.

(**) *Justini hist. lib. II. cap. I.*

vés en Sibérie & les utenſiles & inſtruments retirés des tombeaux, prouvent l'exiſtence, dans ce pays, d'un peuple adonné à la récherche des mines, entendu à fondre le cuivre & à le couler en moules. Mais ces anciennes exploitations marquent moins l'intelligence que l'aſſiduité d'un peuple nomade, que ſa vie errante & oiſive méttait dans le cas de multiplier les découvertes en ce genre. Ces métallicoles faiſoient la fonte du cuivre fort imparfaitement & ne produiſoient l'or que par le ſimple procédé du lavage de mines terreuſes. Leur cuivre n'eſt qu'imparfaitement rafiné & conſerve, avec ſes mixtions étrangéres, un degré de dureté, que le hazard faiſait ſervir de trempe pour leurs armes & inſtruments tranchans. De plus les formes des ouvrages, qu'ils ont ſû produire, ſont brutes & groſſiéres; une mauvaiſe ciſelure a quelque fois plûtôt gaté que rélevé les contours de la fonte. La varieté de ces productions d'un art naiſſant eſt trés bornée & leurs nombre aſſez peu conſiderable dans chaque ſépulcre. Tout cela annonce un peuple pauvre en inventions & en meubles & pas plus cultivé, que le ſont nos Calmoucs, ou que nos Bourattes pourroient prétendre de l'étre avec toute leur adreſſe à damasquiner le fer haché en or & argent. Joignez à cela l'abſence de toute ruine en maçonnerie, de toute trace de villes ou demeures fixes; remarquez qu'on ne trouve aucune monnoye & ſur les ouvrages de ce peuple aucune trace de lettres ou d'écriture, & que les figures groſſiérement entaillées ſur quelques pierres ſépulcrales, ne ſont pas des lettres d'un alphabet, mais répreſentent des marques bizarres affectées aux individus, telles que pluſieurs peuples barbares de la Sibérie ont encore contume de

faire

faire marquer ſur la peau du carpe & donnent pour ſignature dans leur commerce avec leurs conquérans policés; ou bien ce ſont des imitations d'objets, auſſi groſſiers que les écorces peintes des ſauvages de l'Amerique: alors je crois que Mr. *Bailly* ne voudra plus de ces monuments pour prouver la préſence de ſes Atlantes en Sibérie. Si tout cela encore ne rébuteroit pas, du moins l'état, dans lequel nous trouvons les tombeaux en queſtion, ne répondra pas à cette antiquité demandée, puisque le bois de melèze & l'écorce de bouleau employés à leur conſtruction interieure, conſerve encore aſſez de conſiſtence, les oſſements, à l'exception de ceux du crane, ſont aſſez entiers, & les ouvrages de cuivre peu degradés; de ſorte que huit ou dix ſiècles ſont tout ce que l'on pourroit accorder d'age à la plûpart de ces monuments.

Nous approcherons peut-être plus d'une probabilité hiſtorique, en ſuppoſant que les travaux métalliques de Sibérie & ces ſépulcres qui s'y raportent, appartiennent à un de ces peuples barbares qui ont inondé l'occident. Au moins eſt il certain, que le même peuple que nous avons tracé, par ſes monuments, jusqu'à la mer noire, a porté ſa maniere d'exploiter les mines jusqu'en Hongrie. J'en ai pour garant Mr. le Chevalier *de Born*, membre étranger de nôtre Academie, un des prémiers ſavants de ce ſiécle pour l'hiſtoire naturelle, la mineralôgie & l'exploitation des mines, auquel nous devons d'excellentes obſervations ſur la Hongrie, & dont le nom ſeul fait autant l'éloge, que ſes talents honorent ſa patrie. Cet illuſtre ſavant nous inſtruit, qu'on a remarqué en Hongrie & dans le Banat de Temeſvar, où la nature & la

poſition des filons même a beaucoup de raport avec ceux de Sibérie, d'anciens travaux de mines en tout ſemblables à ceux que j'ai fait connoitre dans nôtre pays. Ce ſont tout de même des puits & des galeries travaillées en rond ou en ellipſe, fort étroites & de peu de profondeur, qui ont un caractère tout à fait different des exploitations romaines, trés-fréquentes dans l'ancienne Dacie. On y remarque auſſi, comme chez nous, que la fonte du minerai a été faite en petit, au plein air, ſouvent ſur la croupe des montagnes, où l'on trouve encore les ſcories & autres traces de cette opération. Mr. *de Born* ne prend pas ſur lui le décider, ſi ces travaux ſont anterieurs à ceux des Romains, on d'une datte plus récente: mais je crois pouvoir ſuppoſer le dernier, & il me ſemble plus que probable, que nos anciennes exploitations, attribuées aux Tchoudes ou Scythes, auſſi bien que celles que Mr. *de Born* nous annonce en Hongrie, ſont dûes à la nation Hongroiſe elle-même, laquelle, aprés avoir parcourue toute la bande métallique de nos montagnes, a trouvé une nouvelle patrie dans les beaux cantons de la Pannonie, ou ſa poſterité devait un jour achever de ſe civiliſer ſous les regnes de Marie Théreſe & de Joſeph II. & faire briller ſon ancien courage ſous l'étendart d'un Prince adoré. Les Hiſtoriens modernes ont aſſez prouvé, que les Ougres ou Hongrois ſont venus de l'Aſie orientale, ou ils occuperent préciſement une partie de la Sibérie, jadis compriſe ſous le nom de la grande Hongrie. Des noms encore exiſtants de montagnes, de riviéres & ſurtout du Lac Madjar, ſitué ſur le coté oriental du Yéniſéi, ſont des monuments parlans de leur ſejour dans ce pays; comme les ruines connues de la ville Madjar, ſituée ſur le Kouma,

ma, au Nord-oueſt de la Mer Caſpienne, prouvent du moins par le nom qui leur reſte, en concurrence avec l'hiſtoire, que cette nation doit avoir paſſé par là. En quittant leur prémiere patrie ſur le Yéniſei, ils ont probablement cotoyé les chaines de montagnes qui par des latitudes toujours temperées les conduiſirent jusqu'aux confins de l'Europe. Du temps de *Carpin* & *Roubrouquis* la partie méridionale des monts Ourals étoit connuë comme le pays des Hongrois, ſous le nom de *Bachart*, peut-être corrompu de Madjar par lequel les Hongrois s'appellent eux mêmes. Ce nom ſubſiſte encore ſur ces montagnes dans celui des Baſchkirs (*) habitans actuels, & quoique ces Baſchkirs, par le mélange tatare, ayent abſolument dégeneré, on remarque pourtant dans leurs cantons des noms de lieux & des moeurs, qui ne ſont pas tatares. Il exiſte de plus, dans une partie plus ſeptentrionale de la même chaine, ancîennement appellée Youghrie, des reſtes de la même tige, qui ont conſervé la langue nationale. Ce ſont les Voghouls & nos autres peuplades, ordinairement compriſes ſous le nom Finnois, nom trop peu illuſtre pour cette puiſſante tige que d'autres nations guerrieres ont pouſſée de l'orient & diſperſé en tant de peuplades detachées. Et quoique les petites tribus de cette affinité, qui nous reſtent en Ruſſie & en Sibérie, n'ayent rien conſervé de cette induſtrie, dont les exploitations & les tombeaux anciens de Sibérie ſont les monuments, il eſt pourtant averé, que les Voghouls, lors de la prémiere invaſion de la Sibérie, ſavaient encore fondre les mines de

(*) Ils ſe nomment proprement *Baſchkert*, ce qui approche aſſez de *Bachart*.

cuivre & couler ce metal en moules pour s'en faire des Idoles (*). Encore aujourd'hui ce ſont eux & les Baſchkires qui font tous les jours des découvertes plus ou moins importantes en fait de mines, dans les montagnes qu'ils habitent. D'ailleurs on peut ſuppoſer, ſans faire violence à la verité, que de cette nation, reputée perdue, & que les Ruſſes n'ont pas tort de comprendre ſous le nom general de *Tchoudh ou Tchoudak* (Scythe), nom affecté à la grande tige Hongroiſe & Finnoiſe, il n'y eut qu'une partie adonnée à la récherche des metaux, & que la plus grande partie de cette Horde menait ſimplement une vie nomade, ou vivoit dans l'état plus ſauvage encore d'un peuple chaſſeur. C'eſt de ces derniers peut-être, que derivent principalement les peuplades de Sibérie qui ſont apparentées aux Hongrois, & dont quelques-unes ont enfin appris, par le voiſinage du peuple Slavon & par neceſſité, à ſe fixer & à cultiver la terre; tandis que le corps de la nation a pouſſé plus loin, en entrainant la partie plus induſtrieuſe.

Au reſte je ne pretends donner ici que des conjectures; heureux ſi elles pourroient paſſer pour plus vraiſemblables, que n'eſt l'affinité ſuppoſée de nos Tchoudes avec les Atlantes devenus ſi célebres par les l'Ouvrages de Mr. *Bailly.*

ME-

(*) C'eſt aſſez remarquable auſſi que Mahomet au ſiège de Conſtantinople en 1452. & 53. ſe ſervit d'un Hongrois habile dans la fonte des metaux pour faire une eſpéce de gros canon ou de pierrier de l'invention de cet Hongrois, avec lequel on fit brêche aux murs. Voy. *Stritter. Memoriae populorum &c. Tom. III. cap. XII. §. 165.*

MEMOIRE
SUR LA
VARIATION DES ANIMAUX;

Premiere Partie, lue à l'Assemblée publique du 19 Septembre, en presence de Msgr. le Prince Royal de Prusse,

par

Mr. PALLAS.

Quelque grande que soit l'obligation que les sciences doivent aux grands hommes, qui de temps en temps s'élevent par la force de leur génie & donnent une nouvelle impulsion aux connaissances humaines: on ne sauroit pourtant disconvenir, que par les hypothèses auxquelles ils sont enclins à se livrer, par leurs opinions particuliéres, souvent hazardées (*a*) & le plis, pour ainsi dire, qu'ils donnent à leur science, ils ne deviennent souvent nuisibles & retardent peut-être tout autant l'avancement des let-

(*a*) Rien ne récule plus le progrés des connoissances, qu'un mauvais ouvrage d'un auteur célébre: parce qu'avant d'instruire, il faut commencer par détromper. *Montesq. Espr. d. Loix L. 30. §. 15.*

lettres, en donnant des entraves aux genies médiocres dont les travaux réunis, n'etant pas assujettis par l'autorité de tels maitres, feroient d'une utilité trés-marquée, quoique moins brillante.

L'Histoire naturelle, en cela, a subie de nos jours le sort des autres sciences. Ceux qui l'étudient aujourd'hui ont à choisir entre deux grands maitres, dont *l'un*, trop attaché à la seule nomenclature & aux déscriptions exterieures, épris d'un systême trop scholastiquement artificiel, semblait traiter d'étrangers à la science ou du moins négliger les récherches anatomiques, la physiologie, l'enchainement des étres organisés & l'historique des moeurs interessantes des animaux. *L'autre*, ennemi de ces methodes que la Nature semble récuser, ne veut presque plus réconnaitre d'ordre, de plan, ni de liaison dans la création sublunaire, récuse jusqu'aux plus étroites affinités par lesquelles la Nature a pour ainsi dire grouppées ses productions, & traite de puerilités, ces genres naturels que l'oeil le moins exercé entrevoit, que le Naturaliste impartial ne peut méconnaitre & contemplera toujours avec satisfaction.

Je n'entreprens pas ici de discuter les torts de ces deux célébres Naturalistes: La raison marche entre leurs sentimens opposés, & l'on a vû le prémier de ces grands hommes préferer en secret l'ordre naturel des étres à son systême, & corriger quelquefois ce dernier, contre ses propres regles, selon les loix de la Nature; de l'autre part Mr. le *Comte de Buffon*, aprés s'étre refusé non seulement au systêmes, surtout à celui du *Chevalier de Linné*, mais à

toute

toute idée de genres naturels, a fini par composer lui-méme des genres & des familles naturelles (*b*), surtout lorsque le nombre des espéces est venû l'accabler dans le progrés de son ouvrage (*c*). L'un & l'autre sont, heureusement pour l'histoire naturelle, venû dans le même siècle, pour faire avancer à pas de géans cette science vers sa perfection, quoique par des chemins tous differents & même opposés. L'un, qui n'existe plus que par l'esprit systematique qu'il a répandu, introduisit l'ordre & la précision dans sa science, & travailla toute sa vie, avec un zéle bien rare, à multiplier la connaissance des étres organisés. L'autre, soutenû par les laborieuses recherches de Mr. *D'Aubenton*, a presqu'epuisé l'histoire naturelle des quadrupédes, étendû les bornes de sa science par l'esprit philosophique & les grandes vuës qu'il y a fait entrer, & par le charme de son éloquence l'a mise en faveur parmis les grands. Si chaqu'un de son coté s'est fait des partisans, le mal est dévenû moins grand, parceque les autorités se sont contre-balancées auprés des personnes capables d'un jugement impartial. Chaqu'un dans un siécle à part auroit peut-être introduit des préjugés plus durables & plus difficiles à surmonter. C'est du moins ce que j'ai senti moi-même dans la matiére, qui sera le sujet de ce Mémoire, ou ces deux savants, d'ailleurs si differents entr'eux, se sont visiblement raprochés dans leurs opinions sur *les varietés & la dégeneration des espéces*, l'un à l'égard du Regne végetal, l'autre pour les animaux, ou l'hypothèse a été même poussée plus loin.

J'ai

(*b*) *Sur la dégéneration des Animaux. Hist. nat. Vol. XIII.*
(*c*) Dans son *Ornithologie.*

J'ai eu quelque peine à me défaire des entraves qu'imposait l'autorité de deux grands Naturalistes, & ce n'est qu'à force de réceuillir & de comparer des faits, que je suis parvenû à fixer mes idées sur les causes générales des variations parmis les êtres organisés, sur les raisons de l'inconstance rémarquable de certaines races d'animaux domestiques & sur l'originalité & la conservation invariable de ce qu'on nomme espéce. Ces difficultés même m'engagent à exposer ces idées, qui ne s'accordent pas avec celles du *Chevalier de Linné* & de Mr. le *Comte de Buffon*, & auxquelles l'exposé de la doctrine de ces grand hommes sur cette matiére pourra nous conduire.

Feu Mr. *de Linné* fut le prémier en Botanique qui remit à leur juste valeur les nombreuses variétés de plantes, éléves des jardins ou filles des circonstances accidentelles, que *Tournefort* & d'autres Botanistes avaient trop légerement rangé de pair avec les espéces primitives. Son zéle à épurer la Botanique de ces varietés erigées en espéces le porta peut-être trop loin & occupera encore longtemps les Botanistes, qui travailleront après lui, à réhabiliter les espéces veritables qu'il a trop liberalement biffé de sa Liste comme varietés, sans les bien connoitre. Sa doctrine était de ne pas se fier aux plantes cultivées & de déclarer simple varieté toute aberration des formes ordinaires qui ne peut étre propagée par la graine, ou du moins qui s'éteint bientôt, soit par un changement de culture, ou en negligeant toute culture, lorsqu'elle a été la cause de la variation. Cette bonne regle n'était pas sans exceptions, comme la Nature en oppose toujours aux loix que les hommes voudroient lui préscrire avant

de

de l'avoir épuisée par l'obfervation. Le célebre Suédois voyoit des aberrations d'efpéces fauvages, qui étaient clairement l'effet du fol, du climat ou d'autres circonftances qui agiffent puiffament fur les vegetaux attachés à la glébe, fe perpetuer fous nos yeux par la graine, comme véritables efpéces; d'un autre coté il voyoit nombre d'efpéces voifines entr'elles, ou femblables à celles d'un autre genre, mais effentiellement diftinctes, végéter dans un même fol & conferver leur caractere malgré la culture. Les prémiéres l'ont encore feduit quelquefois à paffer comme efpéce, ce qui n'était que varieté fortement imprimée (*d*), & les fécondes plus fouvent encore à confondre des efpéces bien diftinctes, venues de differents climats lesquelles, furtout dans l'herbier, avoient parues trop voifines. — Enfin les efpéces, ou la Nature, qui fouvent fe copie pour varier, femble avoir empruntées quelques parties de deux autres efpéces ou bien même de deux genres divers, pour en compofer un ambigû, lui firent naitre une idée, que fes difciples n'ont pas manqué de repéter & d'étendre: celle de traiter ces efpéces de métis ou de productions ambigènes, en mettant pour règle, que les parties de la fleur & toute la fructification devaient toujours fuivre la mére, mais que les feuilles & autres proprietés acceffoires derivoient du pére préfomtif. (*e*) Mr. *de*

(*d*) Je ne citerai que fon *Atraphaxis* qu'il diftingue du *Polygonum fruticofum*; le *Peloria* qui n'eft qu'une monftruofité; le *Veronica multifida* variété du *V. auftriaca*, comme le *V. virginica* l'eft peut-être du *V. fibirica*.

(*e*) Voy. fes Differtations: *Plantae hybridae* dans le *Volume III.* & *Generatio* ambigena dans le *Volume VI.* des *Amoenitates academicae*, ainfi que d'autres paffages de fes écrits.

de Linné s'était ſi bien familiariſé avec cette idée, qu'il n'heſitait jamais à denoncer les ſouches de ces eſpéces ambigûes; Il ſoupçonnoit même que pluſieures de ces eſpéces, qu'on a découvert dépuis le temps de *Tournefort*, pourroient avoir été produites dans cet intervalle de temps, par des mélanges illicites; de ſorte que la Nature nonſeulement continuait encore à produire de nouvelles eſpéces par ce moyen, mais que peut-étre même la création n'avoit d'abord produits que des genres ſimples, dont les mélanges ſucceſſifs euſſent donné origine à ce nombre d'eſpéces que nous connaiſſons aujourd'hui. — Quelque plauſible qu'on puiſſe rendre cette hypothèſe, que l'auteur étendait même aux animaux, plauſible ſurtout par ces genres, dont la nature a copieuſement variées les eſpéces dans certaines parties du globe: la grande difficulté pourtant qu'on a de produire, avec toute l'induſtrie humaine, des métis de deux eſpéces differentes, l'impoſſibilité confirmée par le fait, de perpetuer ces métis comme eſpéces ou races diſtinctes, ſoit à cauſe de leur infécondité abſolue ou rélative, ſoit à cauſe de la dégeneration régreſſive à laquelle leur iſſue eſt ſujette, lorsque ces métis demandent pour étre fecondés l'aide d'une de leur tiges primitives (*f*), tout cela oppoſe des faits à une ſimple probabilité & fait entrevoir toutes ces eſpéces, que la nature affecte de rendre reſſemblantes, ou qui forment la connexion des genres, comme primitives, projettées

---

(*f*) Mrs. *Koelreuter* & *Ebel* ont inſtitué des experiences ſur les métis de plantes, dont les réſultats prouvent abſolument cootre l'opinion du Chevalier *Linné*. Voy. auſſi les *Nov. Comment. Acad. Petropol. Vol.* XX. *p.* 56.

jettées dans le prémier plan de la création & destinées pour former cet enchainement des étres, que nous admirons sans pouvoir en rendre raison, plus que du choix, de l'accord & du mélange des couleurs & des ornements, que la même force créatrice a employé pour embellir ses oeuvres. Nous voyons, surtout dans les genres & classes plus abondantes en espéces, souvent deux, trois ou même plusieures de ces espéces comme faites d'aprés un même modèle plus ou moin varié, mais toujours constamment distinctes entr'elles (*g*); nous en voyons dans les classes & familles, ou les varietés sont naturellement rares & l'adulteration, par la structure des fleurs, devient impraticable, même aux artifices de l'homme (*h*); mais aussi nous voyons que ces ressemblances qui lient les espéces, les genres & même les familles naturelles, subsistent, sans qu'il en naisse sous nos yeux de nouveaux chainons par les seules opérations de la Nature; & depuis plus d'un siècle qu'on a observé les plantes & les animaux avec un soin particulier, on n'a pû prouver une seule espéce bien distincte & bien constante dans la nature qui fut d'origine moderne. — Enfin les coquillages, les ossements d'animaux que contiennent les couches formées dans les prémiers ages de la Nature vivante de nôtre globe, montrent la même variété, les mêmes formes qu'on trouve encore aujourd'huy & même des espéces que l'on n'a pû encore se procurer récentes.

(*g*) Il y auroit ici une infinité d'exemples à citer depuis les Singes & les Solipêdes jusqu'aux Papilions & Coquillages.

(*h*) Par exemple les Plantes *Labiées*, les *Papilionacées,* surtout les genres d'Astragales, de Phaseoles, de Linaires; les *Orchides* &c.

Je ne m'étendrai pas plus ſur ces idées, qui régardent principalement les vegetaux, pour paſſer a celles que Mr. le *Comte de Buffon* a propoſé ſur la dégeneration des animaux, comme plus directement rélatives à l'objet que je me propoſe de traiter. Ce Naturaliſte-Philoſophe a été plus loin que le *Chev. de Linné*, avec une hypothéſe à peu prés ſemblable à l'égard des animaux: Il avait ſans doute raiſon de réduire à leurs tiges primitives les races nombreuſes d'animaux domeſtiques; & quoique, dans cette réduction, il n'ait peut-étre pas toujours diſtingué l'origine veritable, & qu'il ait quelquefois compté pour varietés, ce qui eſt effectivement eſpéce diſtincte (*i*), on ne ſaurait pourtant qu'applaudir à la plus grande partie des corrections que la Zoologie Lui doit à cet égard. Etendant par là ſes vues il a pouſſé plus loin: & d'abord il confond presque tout le genre des Gazelles d'une part, & de l'autre les Chêvres domeſtiques, le Bouc-étain, le Chamois & la Brebis (animaux fonciérement differents par bien des points de leur ſtructure, ſurtout par l'inſtinct) comme des varietés provenues d'une ſeule ſouche. On eſt aſſez étonné, lorsque, en récherchant les preuves de cette aſſertion, on ne trouve qu'une ſeule admiſſible, qui eſt le mélange ordinairement fécond du Bouc avec la Brebis, & la fécondité des métis produits par ce mélange. Car d'ailleurs il n'exiſte aucun exemple, que le Chamois ſe ſoit jamais melé à ces eſpéces; ou

---

(*i*) *Degéneration des anim. Vol. XIV.* de *l'Hiſt. nat. p. 328.* & ſuiv. à l'égard de quelques eſpéces collatérales du Cochon & du Cerf, ainſi que pour le Liêvre des alpes, qu'il compte comme varieté, mais que j'ai prouvé étre d'eſpece diſtincte (*Nov. Spec. quadrup. e glirium ordine p.* 1. & ſuiv.).

ou que les Gazelles, dont les eſpéces, de l'aveu même de Mr. *de Buffon*, ne ſe mélent pas entr'elles dans l'état de liberté, ayent été ſubjuguées & accouplées par l'homme, ſi ce n'eſt dans quelques cas rares, comme celui qui a été raporté par *Linné*, ou l'eſpéce de Gazelle, quon dit avoir produit avec le Cabri, n'eſt pas ſeulement determinée avec exactitude. D'ailleurs la reſſemblance des Gazelles entr'elles n'eſt pas plus grande, ou plutôt elle eſt moins frapante, qu'entre les eſpéces des Pieds-fourchus à corne ſolides, ou des animaux carnaciers à griffes retractiles, que le Pline Français a cependant bien minutieuſement diſtingué (*k*).

Enfin dans l'éloquent *Mémoire ſur la dégeneration des animaux* le célebre Auteur qui avait ci-devant ſoutenu " que toutes les eſpéces d'animaux ſont " iſolées & ont un droit égal à la création, que dans " la Nature tout eſt original (*l*), et qu'elle ne connait " pas de genres," s'eſt enfin oublié jusqu'à grouper Lui-même les eſpéces voiſines des quadrupédes par genres & familles naturelles, & ſe fonde ſur ces affinités & ſur l'expoſé, d'ailleurs trés-judicieu, qu'il y donne des cauſes qui peuvent contribuer à faire varier les animaux domeſtiques & même les eſpéces ſpontanées, pour étayer l'étrange doctrine de la transformation de certaines eſpéces, qu'il adopte comme ſouches primitives, en autant d'eſpéces & même de genres (ou ſelon Lui de races) voi-

 ſines

(*k*) Voy. *Spicilegia Zoologica XIII. p. 35.* ſuiv.

(*l*) Voy. l'hiſt. nat. du Zèbre *Vol. XII. p. 3.* & la critique des méthodes.

ſines & reſſemblantes, qu'il en exiſte aujourd'huy; & des idées plus étranges encore ſur l'origine de la plûpart des quadrupédes du nouveau Monde, par des métamorphoſes, presqu'auſſi merveilleuſes que celles de Telliamed & d'Ovide, de ceux de l'ancien continent que les grandes cataſtrophes arrivées à nôtre globe y auraient tranſplantées. — Avec toute conceſſion raiſonable: l'influence du climat, la nourriture, les accidents multipliés à raiſon du nombre des individus & des portées dans les eſpéces qui pullulent le plus, (trois cauſes ſur lesquelles Mr. *de B.* appuye principalement) ne pouvoient jamais, quelqu'ancienne qu'on ſuppoſe leur influence, changer le total des formes, les proportions & même la ſtructure interieure (*m*) à ce point, qu'on devroit ſuppoſer pour le ſoutien de cette hypothèſe. Nous voyons dans les animaux domeſtiques que l'homme a tranſplanté dans les climats les plus oppoſés, que la puis-

(*m*) Le Pécari on Tayaçou d'Amerique eſt la ſeule eſpéce de l'affinité du Cochon laquelle, avec tous les caractéres exterieurs de ſon genre, a l'eſtomac à pluſieures poches, presque ſemblable à celui des animaux qui ruminent; il a de plus un follicule ouvert ſur les reins, dont il exiſte, dans tout le regne animal, hors le Pécari, qu'un ſeul exemple d'une eſpéce de Gazelle d'Afrique décrite par Mr. le Prof. *Allamand* dans *l'Edition hollandaiſe de Buffon.* Cependant M. le C. de *Buffon* traite ces deux grandes parcularités, qui ne ſont pas les ſeules marques diſtinctives du Pecari, de petits caractéres & croit pouvoir déduire ſa race des Cochons de l'ancien continent changés par le climat d'Amérique. Le Pangolin & le Phatagin de même lui ont ſemblé pouvoir être la ſouche des Fourmilliers d'Amérique (p. 371.). Mais j'aimerois autant déduire les Tatous du Hériſſon, le Tapir du Rhinoceros, les Philandres des Muſaraignées (que Mr. le C. de B. a oublié de ranger dans ſes familles, ainſi que le Portemuſc & les Chevrotains). Et pourquoi l'Orang-outang ne ſeroit donc pas, ſelon cette doctrine, un homme dégeneré, comme Milord *Monboddo* l'a jadis prétendu?

puiſſance du ciel opére tout au plus ſur la qualité du poil & la couleur; que les paturâges, comme nous le détaillerons plus loin, ne peuvent changer que la taille, la proportion des cornes, & ajouter quelques depots de graiſſe à la forme; mais qu'un petit nombre de génerations ſuffit ſouvent pour détruire dans un autre ſol, ce que l'animal avait gagné par des ſiécles de culture. De plus ſi l'on conſidére les eſpéces, tant des quadrupé des que des oiſeaux, les plus nombreuſes en individus & dont les portées ſont auſſi fréquentes que copieuſes, la ſomme des aberrations qu'on obſerve n'eſt pas en raiſon de ces nombres: Quelques eſpéces trés-multipliées ſe propagent exemptes de varietés, tandis que d'autres, moins nombreuſes, varient beaucoup (*n*). Il y a même des eſpéces trés-voiſines entr'elles, presqu' également nombreuſes & répandues toutes deux dans des climats oppoſés, dont l'une a formé des varietés conſiderables, tandis que l'autre ſe reſſemble partout. Le Bobak & le Souslik en ſont des exemples d'autant plus pertinents, que ſelon Mr. le Comte *de Buffon* la nourriture vegetale doit influer plus fortement ſur les animaux, que l'animale, par laquelle il a crû que les eſpéces carnacieres ont moins degeneré: le Bobak donc qui ne vit que de vegetaux, ſans jamais toucher aux ſubſtances animales, eſt reſté le même dépuis la Pologne jusqu'au Léna; le Souslik, auſſi carnacier que le Surmulot, a formé dans les mêmes latitudes & ſous des circonſtances d'ailleurs toutes ſemblables, des variétes de gran-

(*n*) Les Hirondelles, les Souris & les Mulots ſont certainement ce qu'il y a de plus multiplié; cependant leurs variations ſont bien rares, ainſi que celles des poiſſons & de pluſieures claſſes d'Inſectes. On pourrait ici alleguer une infinité d'exemples.

grandeur, de couleur & de proportion trés-conſidérables (*o*).

Qu'on ſuppoſe auſſi anciennes qu'on voudra des tranſplantations d'eſpéces produites par une de ces grandes cataſtrophes arrivées ſur nôtre globe, que Mr. le C. *de Buffon* adopte pour cauſe des dégenerations; qu'on admette même l'influence d'un climat étranger à l'animal, beaucoup plus puiſſante, qu'elle ne l'eſt en effet: On ne pourra cependant jamais rendre raiſon, de ce que tant d'eſpéces qui ſe trouvent dans les deux continents, & qui ſe ſont répandues depuis la zone glacée jusqu'au tropique, n'ont pas varié & ne changent pas continuellement de forme & de naturel. Pourquoi l'homme même, qui s'eſt naturaliſé dans tous les climats & ſur toutes les terres du globe, a conſervé ſon eſpéce pure & n'a éprouvé, tout au plus, que des changements ſuperficiels de ſa peau & de ſa chevelure: malgré les intruſions violentes d'eſpéces auſſi voiſines de lui que le Pongho; malgré ſon écartement de l'état de nature, ſa nourriture & ſes habitudes factices & variées à l'infini? Comment ſur la même longitude on trouve trois nations ſemblables, jusqu'à la phyſionomie & la couleur des cheveux & de la peau, ſous des latitudes & des conditions auſſi différentes, que l'Indien phytophage, civiliſé & habitant d'un climat brulant; le Tatare & le Mongole nomade & carnacier du milieu de l'Aſie, dont la nourriture a pourtant influé conſidérablement ſur le naturel & même le poids des ſolides

(*o*) Voy. *Novae Spec. quadr. e glir. ordine p.* 103. 122. *ſeq.*

lides du corps (r); & le Samoyede ichthyophage de la Zone glacée & donc le caractére national se soutient à coté du peuple Ostiaque, trés-voisin, nourri de même, sous le même climat, mais tout à fait different par les traits, le teint & les cheveux. Je cite le Samoyéde, parceque je sais que ces hommes, dont on a voulu faire des nains rapetissés par les froids arctiques, sont des hommes, (pas à la verité d'une grande taille, qui ne s'accorde pas avec le genre de vie des peuples chasseurs, mais) aussi bien faits que leurs fréres nationaux les Koïbales, qui habitent la lisiére meridionale de la Sibérie, & que les Toungouses imberbes de la Siberie orientale, qui doivent encore leur ceder la préference (s).

La tyrannie que l'homme exerce sur les animaux domestiques, n'a jamais pû influer sur aucune espéce sauvage. L'état d'asservissement & les circonstances qui l'accompagnent, est sans doute une cause bien plus puissante de variations dans les races domestiques, que tout ce que des animaux sauvages peuvent souffrir de désavantageu par les transplantations les plus opposées & les plus désastreu-

(r) J'ai raporté ailleurs la legereté remarquable des Nomades de la race Mongole qui habitent au delà du Baïcal (*Samlunge über die Mongolischen Völkerschaft n.* I *Theil, p* 171.). La gravité specifique du corps varie d'ailleurs extremement d'homme à homme & surtout parmis les femmes, & il feroit difficile d'en donner des bonnes raisons.

(s) Voy. le *Mémoire sur les Samoyedes & les Lapons* de Mr. *de Klingstaedt* & le *Vol. III.* de mes *Voyages* p. 68. sur les Samoyedes & p. 374. sur les Koïbales.

astreuses. Cependant l'homme n'a pû dénaturer aucun des animaux, qu'il s'est asservi, au point d'en former une race ou espéce distincte & constante. Ceux d'entre ces animaux domestiques, dont l'espéce était unique dans le climat ou elle fut subjuguée, & dont la progéniture s'est conservée pure, n'ont presque pas subie la moindre alteration de forme dans les climats divers ou ils ont été successivement obligés de vivre & de multiplier. Le *Cheval* & *l'Ane*, sauvages & domestiques, ont moins varié, que certaines espéces tout à fait spontanées, que le climat seul a travesti. Le *Chameau* en Asie & le *Dromadaire* en Afrique sont partout ou ils ont pû vivre, de la même forme, probablement peu differente de leur tiges sauvages (*t*). Si le *Chien*, la *Brebis*, la *Chêvre* ont subit des alterations plus marquées, ce n'est pas à l'esclavage seul, ni à la nourriture, ni aux climats divers, qu'il faut attribuer ces déviations: Elles sont l'effet d'une cause plus profonde & plus puissante; d'un vice introduit dans les facultés generatives de ces races par des melanges d'especes. Vice qui pourroit être comparé en quelque façon aux alterations des

(*t*) Les Chameaux à deux bosses qui existent encore sauvages entre le Tybet & la Chine, sont pourvus des mêmes bosses & des mêmes callosités pour le support du corps accroupi, qu'on remarque à ces animaux devenus domestiques. Monsieur le *C. de Buffon* prétend en vain que ces bosses & ces callosités sont le produit de la servitude; c'est comme si l'on vouloit appeller le follicule du Musc & la glande dorsale du Pécari des abscés causés par maladie. L'Ane plus maltraité que le Chameau, & le Pacos qui sert de même à porter des fardeaux, pourquoi n'ont ils par acquis des bosses héréditaires & le Cheval que n'a-t il, par tant de travaux, acquis à sa race des callosités aux parties les plus exposées aux meurtrissures de la selle ou des harnois?

des fluides & même de l'action des solides d'un corps vivant par le ferment d'un miasme quelconque.

Les espéces pures & originales, qui sont l'oeuvre de la création, ne se mélent jamais dans l'état de simple nature: l'instinct, les inimitiés réciproques les tiennent eloignées. Si par des accidens rares des individus differents d'espéce & de sexe, mais assez semblables pour en rendre l'alliance possible, se sont jamais trouvés isolés & solitaires dans quelqu' Isle, leur issue ou stérile par soi-même n'aura pû perpetuer sa forme ambigéne, ou bien, en se croisant avec les parents, aura bientôt reprise, à la prémiere ou seconde generation, la forme primitive de l'une ou l'autre espéce. D'ailleurs les métis ont presque toujours le caractére de la mére prédominant, & de ceux qui sont propres à engendrer, comme il en vient surtout dans la classe des oiseaux, la posterité se rapproche toujours plus de leur ayeule, en effaçant le caractére imprimé par le mâle étranger, à moins qu'on ne leur donne deréchef des mâles de l'autre espéce (*u*). La production de nouvelles espéces, par le mélange d'animaux spontanés, dévient par là trés peu probable, & les combinaisons réquises pour joindre deux espéces differentes, dans l'état sauvage, doivent aussi avoir été bien rares dans tous les ages du monde. Parmis les Insectes même, dont plusieu-

 res

(*u*) L'Oye chinoise (*A. Cygnoides*) est en Russie frequemment accouplée avec des femelles de l'Oye domestique ordinaire. Les métis produits par cette union sont une belle race trés féconde, mais qui rétrograde par la suite à l'état de l'Oye domestique, si on n'a pas soin de la croiser de nouveau avec l'Oye chinoise.

res espéces ont été observées en adultère, & parmis les Poissons dont le fraix, devant être fécondé hors du corps de la mére, semble parlà souvent exposé à une fécondation étrangére, les métis cependant sont aussi rares que les varietés & les monstres (*v*).

Il en est tout autrement des animaux domestiques: les prémiers hommes qui s'aviserent d'en apprivoiser, dans l'intention d'en former des troupeaux pour leur subsistance, n'etoient surement pas dans le cas de choisir les individus. Quelques unes des jeunes betes que la chasse leur procurait vivantes, devoient perir dans le prémier age; celles qui survivoient durent alors être accouplées avec quelque mâle d'une autre espéce voisine, que le hazard offrait, ou bien ces adulterations arriverent dans la suite, tant que les animaux domestiques étoient encore rares dans ces prémiers ages du monde. Il est certain que les espéces, dont les métis relativement sterils ne produisoient pas entr'eux, ne purent transmettre leur forme vitiée; les maitres durent bientôt réchercher la pureté de ces races, & ce qu'ils avaient de batards devait, en se croisant avec les races parentes, s'en raprocher par degrés. Par cette raison le *Cheval* & *l'Ane* sont resté les mêmes dans

(*v*) Parmis les Punaises d'arbres, les Coccinelles & les Chrysomêles, on observe assez souvent de ces accouplements héterogênes; cependant on n'en voit par naitre de nouvelles espêces, & l'issue des varietés se rapproche de l'une ou l'autre tige primitive. Des métis de Poissons ne sont pas encore bien averés, & quoiqu'on trouve des monstres de differente composition parmi le frétin du prémier age, il est cependant presque sans exemple de voir de ces monstres d'un age plus avancé.

dans tous les climats; une telle espéce pure est encore nôtre *Boeuf*, dont on ne connait d'autre varieté domestique considerable, que celle à bosses graisseuses dans quelques pays chauds, varieté qui n'est guéres plus importante que le gros ventre d'un luxurieu. Le *Chameau* & le *Dromadaire*, chaqu'un seul de son espéce dans la partie du monde où il est devenû domestique, n'ont pas soufert de mélange, ni subi une variation considerable de raçes depuis plus de trente siécles de servitude. Le *Cochon* domestique en Europe & dans une grande partie de l'Asie, où le Sanglier ordinaire, dont l'espéce est répandue jusqu'à l'Océan oriental, était la seule espéce dont on pût tirer cette race privée, a presque toujours conservé sa forme primitive; malgré la frequence de ses portées nombreuses, malgré la nourriture vile, forcée & variable qu'on lui abandonne, on ne l'a vû changer que par la taille, la grosseur, la couleur, & les oreilles plus ou moins grandes & pendantes (*).

 Le

(*) Qu'on ne m'objecte pas le Cochon chinois à dos arrondi, presque nud & bas sur les pieds, introduit par les Anglois en Europe & par les Chinois même en Sibérie; ni le Cochon de Guinée à oreilles pointues & allongées. Je soutiendrai toujours & des Voyageurs observateurs le prouveront un jour, que cette raçe Chinoise derive d'une autre espêce sauvage, tout-à-fait differente en forme & en instinct de nôtre Sanglier. Cette espéce est le Sanglier de la Nouvelle Hollande dont tant de Voyageurs font mention (*Pennant Hist. of Quadrupeds p.* 128.). La race domestique s'est repandue delà par toutes les Isles de l'Océan Indien & de la grande Mer du Sud. Peut-étre qu'effectivement il n'existoit pas autrefois de Cochons domestiques ni sauvages aux Indes, comme l'a dit *Elien* d'aprés Ctésias au *Livre III. Chap. 3.* de son *Hist. des anim.* Pour le Cochon de Guinée il est probablement issû d'une autre espéce sauvage encore imparfaitement connûe (*Pennant. l. c. p.* 132.). Ces deux espéces, même domestiques

Le *Renne* enfin, ſeul dans ſa plage arctique & ne pouvant ſubſiſter ailleurs, eſt reſté une race pure, qui n'a presque point degéneré dans l'état domeſtique. On pourroit auſſi mettre le *Chat* de ce nombre, dont les variations ſe bornent au poil, ou ne ſont qu'accidentelles.

Mais le cas eſt bien different pour la *Chèvre*, la *Brebis*, le *Chien* & une partie des oiſeaux domeſtiques. Ces animaux ont tant degeneré de leur prémier type, qu'on a de la peine à réconnoitre leur ſouche ſauvage; peut-être quelques unes ne ſont-ils abſolument que des races factices, auxquelles on ne peut & ne doit aſſigner une ſeule eſpéce pour tige prémiére. Et toute paradoxe que peut ſembler cette idée, j'eſpére qu'on la trouvera moins eloignée de la verité, lorsqu'on aura ſuivi les détails dans lesquels je dois néceſſairement entrer pour l'appuyer, & qui feront entrevoir avec la plus grande vraiſemblance l'origine & la cauſe des nombreuſes & groſſes varietés parmis ces animaux domeſtiques.

Presque tous les Naturaliſtes ont conſideré le Bouc-ètain comme ſeule tige de nôtre *Chèvre domeſtique*, & c'eſt un fait, qu'elle produit facilement avec cet animal apprivoiſé (*x*). Mais les métis de ce melange reſſemblent ſi bien au père par le poil & la forme des cornes, qu'on s'apperçoit bientôt de l'origine étrangére. J'ai prouvé ail-

ſtiques ne ſe melent pas volontier avec nos Cochons ordinaires, quoique tout animal dans l'état de domeſticité ſoit plus ardent à s'accoupler & moins fidele à ſon eſpéce.

(*x*) Voyez des exemples de ces accouplements *Spicileg. Zoologica Faſc. XI. p.*

ailleurs que la principale ſouche de nos Chèvres, de laquelle leur vient ſurtout la forme des cornes, eſt cette Chèvre ſauvage que *Kaempfer* nous a fait connaitre, ſous le nom de *Paſeng*, comme l'animal dont on tire le vrai Bézoard (*y*). Elle habite les montagnes de l'Inde, de la Perſe, peut-être auſſi de l'Aſie mineure & de la Gréce. Dans ces pays élevés & antiques, qui ont été ſans doute le prémier berceau de l'homme civiliſé, il n'eſt guéres poſſible que le Bouc-étain, qui multiplie auſſi ſur les plus hautes montagnes de l'Aſie, n'ait été apprivoiſé quelquefois, quoique peut-étre plus rarement à cauſe des lieux elevés & inacceſſibles qu'il récherche. Deslors on l'aura joint aux Chèvres-Paſengs devenues domeſtiques, & le produit de cet accouplement devait étre un métis, bien que d'une forme alterée, auſſi fécond, que ceux qu'on obtient encore aujourd'huy en donnant le Bouc-étain aux troupeaux de Chèvres domeſtiques. Ce mélange étranger plus ſouvent réiteré par les anciens alpicoles, d'abord nomades & chaſſeurs à la fois, a dû introduire la prémière inconſtance, le prémier germe de déviation du type primitif, lequel s'eſt pourtant aſſez bien ſoutenû, pour qu'on réconnoiſſe encore, dans la plûpart des Chèvres domeſtiques, la forme & les cornes de la tige principale (*z*). Sur le Caucaſe & les hautes mon-

(*y*) J'ai décris cet animal dans l'ouvrage cité à la note précedente. Il eſt donc ſuperflû de répeter ici, que Mr. le *C. de Buffon* attribuait à faux le vrai Bézoard à une eſpéce de Gazelle qu'il a nommé *Paſan*.

(*z*) En Dalmatie, ~~ſelon l'obſervation de Mr. *Brünnich*,~~ les Chèvres domeſtiques reſſemblent toutes à l'Ibex. Dans toute l'Aſie boréale elles tiennent plus de la Chèvre-Paſeng. L'on pourroit inférer delà, que les troupeaux de Chèvre de Dalmatie ont été produits & plus ſouvent croiſés avec la race du Bouc-étain, en Aſie au contraire avec le Paſeng apprivoiſé.

montagnes de l'Asie mineure il existe encore une autre Chèvre sauvage, inconnue à Mr. le Comte *de Buffon*, à cornes contournées, presqu'à la maniére du Mouflon, mais portante une double Barbe comme la Chévre-Paseng (*a*). Il se peut que l'introduction de quelques individus apprivoisés de cette Chèvre du Caucase ait produit, conjointement avec le climat de l'Asie mineure, la race des Chèvres d'Angora, trop differente, surtout par les cornes divergentes & contournées en spirale, de toutes les autres races de Chèvres privées, pour en attribuer l'origine à la seule influence du sol & du climat. On pourroit peut-être aussi soupçonner que ces Chèvres d'Angora dérivent principalement de la Chèvre du Caucase apprivoisée, & que le mélange de la même espéce sauvage avec les Brebis domestiques ait produit la race des Brebis de Valachie & d'Hongrie, dont les cornes spirales indiquent une origine commune. Le Cabri d'Afrique encore semble tenir sa couleur & ses autres differences du croisement d'une espéce sauvage, qui pourrait étre particulière aux montagnes d'Afrique (*b*). Toutes ces differentes races ont ensuite été transportées loin de leurs prémiéres patries, ou elle ne pouvoient plus étre croisées avec les lignées sauvages, que les hommes en outre ont chassé & exterminé partout à mésure que les troupeaux & la population ont augmentes sur le globe. De proche en proche ces races se sont melées, l'inconstance des formes a augmentée d'une gene-

ration

(*a*) Voyez *Acta Acad. Petrop. la description de Capra caucasica.*

(*b*) Le Tragélaphe de *Kay* decrit aussi par *Pennant* (*Hist. Quadr. p.* 47.) semble different de la Chevre du Caucase.

ration à l'autre & la Chèvre domestique est enfin devenue ce qu'elle est aujourd'huy, une race variable & bizarre.

Nos *Bêtes à laine* réconnaissent peut-être le Mouflon pour leur souche principale; mais l'Argali de Siberie est indubitablement une espéce extremement voisine qui pourroit y avoir sa part. Si la race domestique derivée ou des Mouflons ou des Argalis était restée pure, je suis sûr que nous n'en verrions pas tant de variétés marquées. Depuis que nous possédons dans le Cabinet de l'Académie la peau entiére de cet Animal du Tourkestan, que les Perses appellent *Bélier sauvage* & qui me semble guêres differer du Mouflon de Corse & de Sardaigne (*c*), j'ai commencé à douter que l'Argali en fut une simple varieté, comme je l'avai crû autrefois avec Mr. *le C. de Buffon*; la forme des cornes surtout semblant les raprocher. Si donc ces animaux forment deux espéces sauvages bien distinctes, comme la comparaison de l'extérieur semble l'indiquer, elle sont sans doute bien voisines entr'elles; & comme il y a tout lieu de croire, que l'une & l'autre de ces espéces aura été apprivoisée en Asie, le mélange d'animaux d'une affinité si marquée devait nécessairement étre fécond, & alterer dans la race domestique cette pureté d'origine, de laquelle dépend la constance des formes dans les animaux. De

(*c*) Cet animal est passablement décrit par *Gmelin* au *Vol. III.* de son *Voyage* de Perse. Selon *Cetti* (*Descrizione della Sardegna*) le Mouflon d'Italie est aussi roussâtre que celui de Perse & les femelles de l'un & de l'autre pays manquent de corne, ce qui distingue surtout le *Mouflon* des *Argalis*.

De plus, les espéces sauvages qui ont produite ensemble la Chèvre domestique, peuvent fort bien avoir contribué à leur tour à corrompre la prémiére tige de nos Brebis, ainsi que le Bouc le fait encore quelquefois, en produisant avec la Brebis des métis féconds (*d*). Il dévient par là plus que probable, que les Bétes à laine de differens climats sont une race composée, qui a pris sa consistance sous la direction de l'homme & dans laquelle les forces géneratives n'étant plus dans leur prémière simplicité, produisirent, sous l'influence des climats & des pâturages, de bien plus grandes & plus promptes déviations du prémier type, que les mêmes influences n'auraient pû faire naitre dans une race domestique pure.

La race variée des *Chiens domestiques* nous offre l'exemple le plus frappant de ces déviations, & la plus forte preuve de la cause que je leurs assigne. C'est aussi celle de toutes les races d'animaux domestiques, que l'homme pour ainsi dire a créée telle qu'elle existe aujourd'hui, par la réunion successive de differentes espéces sauvages, naturellement rapprochées. On est dépuis des siécles à mêler & à croiser ces espéces pour former des races de chiens propres au service qu'on en desiroit. On voit dans *Aristote*,

(*d*) Si le Bélier ne produit pas avec la Chèvre, tandis que le Bouc féconde la Brebis, je n'en infereroit pas avec Mr. *de Buffon* que la race des bêtes à laine est plus faible; mais je chercherois plutôt la cause de cette difference dans la conformation des organes du Bélier ou de la Chèvre, qui ne se conviennent peut-étre pas si bien, que ceux du Bouc & de la Brebis.

ſtote, que ces melanges ont été faits avant ſon temps (*e*), & quoique Mr. le Comte *de Buffon*, ſur quelques experiences manquées, ait d'abord parû douter que le Chien puiſſe engendrer avec l'eſpéce du Loup & du Rénard, pluſieures obſervations modernes ont depuis conſtaté ces faits. La Louve a produite avec le Chien en Flandres, & en Angleterre il y a eu pluſieurs exemples de Chiennes fécondées par le Loup (*f*); on a vû depuis peu dans les environs de Moſcou des Loups noirs engendrer, ſans beaucoup de ſoins, avec des Chiennes, & les métis de cette alliance féconds à leur tour. Pour le mélange fécond de l'eſpéce du Renard avec le Chien domeſtique, pluſieurs exemples en ont été produits en Allemagne & en Angleterre (*g*), ou les métis, qui en réſulterent, ont auſſi en partie prouvé leur fécondité. — On ne peut donc raiſonnablement douter, que la jonction du Chien avec le Chacal, qui de tous les animaux du genre reſſemble le plus, par la taille, la forme & l'inſtinct, au races ordinaires de l'animal domeſtique, duſſe étre tout auſſi féconde, ſurtout dans le climat naturel au Chacal. Il eſt vrai que le ſeul eſſai moderne de ce genre, qu'on ait été a portée de

m 2 faire

(*e*) *Ariſtotel. hiſt. anim. lib. VIII. c. 28. Oppian. cyneget. Lib. 1. verſ. 392. ſeq.* ou il eſt pourtant dit que les races pures ſont les meilleures; & *verſ. 429. ſeq.* que les chiens ſont préferables qui ont une reſſemblance quelconque aux bêtes fauves, p. ex. au Loup, au Renard, au Tygre.

(*f*) *Pennant Hiſt. of quadr. p. 222. 223. not. Pline* dit (au *Liv. VIII. chap. 11.* de ſon *hiſt. nat.*) que les Gaulois meloient le Loup avec la Chienne pour produire leurs meilleurs Chiens de chaſſe.

(*g*) *Blumenbach de generis humani varietate nativa p. 10. Zimmerman Zool. geogr. Pennant Hiſt. of quadr. l. c.*

faire (*h*), & dont on pouvait bien augurer d'aprés la familiarité du Chacal mâle & l'amitié naturelle qu'il portait au Chiens, a pourtant manqué; mais comme l'animal employé à cet essay a trop peu vécu, était encore jeune, maladif & fatigué d'un long voyage, que l'experience a été faite dans un climat froid avant que le temps du rut borné pour l'animal sauvage fut venû, & qu'on n'a pas eu le temps de varier les circonstances: on n'en pourra rien conclure contre ma supposition d'autant moins, que parmis les orientaux c'est un fait connû, que le Chacal, même sauvage, s'accouple avec les Chiennes domestiques: & le nom de Chien sauvage, qu'ils ont donné au Chacal, prouve assez ce qu'on y a pensé de son affinité avec le Chien domestique. Aussi suis-je bien persuadé que le Chacal, qui se familiarise & s'attache tres-facilement à l'homme, & donc le naturel sociable & l'instinct pour la chasse courante approche le plus de la nature du Chien, a principalement part à la race de cet ami des hommes. Mais de temps immémorial son issue s'est melée dans l'état domestique avec la plûpart des autres animaux de ce genre, pour produire enfin l'animal factice que nous appellons Chien, dont la race corrompue a variée à l'infini par les diverses combinaisons & par d'autres influences.

Mr. le Comte *de Buffon* compte trente varietés ou races de Chiens, dont il a raporté les dix sept principales au climat, qui n'a certainement pas pû agir avec tant

(*h*) *Güldenstaedt*, dans sa déscription du Chacal, en a fait le recit.

tant d'énergie sur des animaux domestiques, puisqu'on n'a pas vû changer considerablement les espéces sauvages tout aussi repandues, & plus exposées aux intemperies des saisons. — D'après le mélange prouvé, du Chien avec les espéces sauvages du même genre, nous ferons surement mieu d'adopter comme *races primitives*, celles qui tiennent le plus de chaqu'un de ces animaux sauvages, même de ceux, dont l'experience moderne n'a pas encore verifié l'accouplement & la fécondité avec nos chiens domestiques. Trois de ces races primitives existoient déja du temps *d'Aristote*, & differaient alors comme leur souche sauvage, même par le temps de la gestation, qui de nos jours, à force de mélanges, est dévenû à peu prés le même pour toutes les chiennes. *Aristote* nous dit, que déslors on croisoit ces races prémieres pour les annoblir. Une des races originales est sans doute *le Chien des peuples Nomades* de l'Asie, donc Mr. *de Buffon* ne semble pas avoir eu connaissance: Il est plus effilé que le Chien berger d'Europe & se raproche par la forme, quelquefois même par la couleur, du Chacal sauvage. Le *Canis Moloticus d'Aristote* semble avoir été cette même race primitive. Le Chacal apprivoisé dans les climats temperés de l'Asie, peut d'abord avoir été croisé avec le Loup. Plus avant vers le Nord, ou le Chacal ne sauroit subsister, les accouplemens réiterés avec les *Loups* auront transformé la race domestique en *Chiens-bergers*, plus forts & plus farouches, qui sont sans doute le *Canis pecuarius* d'Aristote. Le Chien-Loup, mal appellé ainsi, parceque le Chien-berger est ordinairement plus semblable au Loup par la couleur & le poil, ne differe de celui-ci que par la longueur de sa fourrure. Dans les deserts du milieu

 de

de l'Aſie on aura toujours continué d'entretenir l'inſtinct & la vigueur de la race domeſtique, en la croiſant de temps en temps avec des *Chacals* aprivoiſés, ou bien le hazard à procuré quelquefois l'accouplement des Chiennes en chaleur avec les Chacals ſauvages (*i*); au moyen de quoi la forme des Chiens nomades s'eſt conſervée plus ſemblable à ces animaux. Par des choix d'accouplements, peut-être auſſi en affamant les Chiennes, on a tiré de cette race la forme effilée du Levrier, donc la race provient du Levant, & qui peut avoir produit, avec les Chiens du Nord, le grand Danois & d'autres varietés ſécondaires.

Le *Dogue*, originaire de l'Inde & de l'Aſie mineure eſt ſans doute, comme ſes caractéres marqués l'indiquent & comme la tradition que les anciens nous ont conſervé ſur les Chiens de l'Inde ſemble le confirmer, le produit d'une autre eſpéce ſauvage, probablement *de la Hyêne*, avec des Chiennes de forte race, qu'on aura expoſé dans les forèts pour les faire couvrir de cet animal féroce, confondu, dans ces anciennes traditions, avec le Tygre,

(*i*) Ceci avient même avec les Loups. On m'a raporté un fait de cette nature arrivé dépuis peu chez les Calmoucs du Volga. Un Calmouc y trouva ſa Chienne, égarée dans les landes, accouplée avec un Loup & eut le temps d'atteindre & de tuer l'animal ſauvage avant qu'il eut pû ſe detacher. Lorsque les Calmoucs autrefois paſſaient & repaſſoient le Volga, aſſez ſouvent un bon nombre de Chiens reſtoit en arrière. Ces Chiens abandonnés courroient les deſerts, ſe nourriſſaient de Mulots, de Souſliks de Lièvres & de jeunes couvées d'oiſeaux & réjoignoient quelquefois leurs maitres aprés une longue abſence. Il eſt bien probable, que de tels Chiens, devenus à moitié ſauvages, s'accouploient ſouvent avec des Loups.

Tygre, dont il porte la livrée. Les métis provenus d'un tel accouplement feront devenus, comme il arrive trés-fouvent à ces productions ambigénes, encore plus grands & plus forts que leur pére, dont ils tiennent la force, le gros mufeau, les oreilles courtes, le poil heriffé du dos, les portées peu nombreufes & fouvent les rayes transverfales, d'ailleurs peu communes parmis les Chiens à l'exception des Doguins qui font les nains de cette race, & des grands Levriers, qui tiennent peut-être auffi cette bigarrure, ainfi que leur grande taille, d'un mélanges eloigné de leur race avec ces Dogues. Par la molleffe de l'éducation & par des artifices, le Dogue par la fuite aura dégeneré jusqu'à produire les Braques & les Chiens courants, qui me femblent étre parmis les derniers refultats des foins de l'homme & de l'abatardiffement domeftique. Une maladie héreditaire eft venûe fe joindre à ces caufes, pour faire naitre les Baffets.

Une autre race primitive encore eft le *Chien-Alopécide* ou Laconic des anciens, que Mr. le Comte *de Buffon* n'a pas admis au nombre des races primitives, qui eft pourtant affez commun dans les pays du Nord, reffemble au Rénard par la tête, les oreilles, les proportions des jambes & de la queue, le tronc bas & allongé, & trés-fouvent par le poil & la couleur, même par l'inftinct & la promptitude des mouvements. Ce Chien eft fans doute provenû *du melange des Renards* avec les petits individus de la prémiere race & ils aura produit, par la dégeneration, l'influence des climats & la culture, plufieures petites varietés de Chiens.

Il eſt trés-poſſible enfin, que le *Chien d'Islande* ſoit une race métive de l'Iſatis, & les *Chiens americains* de quelques eſpéces de Renards du nouveau monde. — Nombre de races ſubalternes ont été formées de ces prémiéres par le choix & le mélange des individus, par des défauts héreditaires, tels que ſont les oreilles pendantes, les jambes torſes, les doigts acceſſoires aux pieds de derrière, quelquefois même fourchus ou doubles dans les Braques, le défaut de la queue, la tête auſſi veluë que le corps, &c. La chaleur des pays meridionaux & plus encore la molleſſe dans laquelle on éleve ſouvent les petits Chiens favoris, produiſent quelquefois la peau raſe, & peuvent même faire d'un Chien bien garni, aprés quelques années d'une telle éducation, un Chien presque tout nud, comme j'en ai fait l'expérience. Enfin les couleurs ſont ce qui eſt le plus variable dans les animaux domeſtiques, ſoit par l'imagination des méres, la faibleſſe des embryons, ou par d'autres circonſtances. Mais les grandes varietés primitives que nous avons paſſé en révue, n'auroient jamais pû naitre ſans mélange acceſſoire dans une eſpéce domeſtique pure.

Il y a parmis la *Volaille domeſtique* des exemples averé & des ſoupçons de melanges ſemblables. Un des mieu conſtaté eſt celui des Oyes domeſtiques auxquelles on donne fréquemment pour mâles l'Oye de la Chine, d'ou réſulte une belle race mitoyenne, qu'on éléve dans quelques parties de la Ruſſie pour donner des combats. Et cette Oye de la Chine, telle qu'elle eſt dans les basſecours, paroit elle-même ne pas être une race pure; l'e-

l'eſpece ſauvage paſſagére en Sibérie, qui en fait la ſouche, pourroit fort bien avoir été accouplée avec une des deux eſpéces de Cygne. Un autre exemple connû, eſt la fécondité du Canard musqué avec la Canne ordinaire. Les varietés nombreuſes de Pigeons domeſtiques doivent ſans doute leur origine au melange de differentes eſpéces collaterales avec le Biſet. — Et nos Poules de baſſecour, dont aucun obſervateur n'a encore bien conſtaté la tige ſauvage, pourroient fort bien étre une race auſſi factice que nos Chiens: quelques varietés du moins, fort communes aujourd'huy, devront étre raportées à une généalogie mixte. La Poule à groſſe hupe par exemple, tient peut-être ſon crane renflé de la Pintade, dont cette eſpéce imite aſſez ordinairement la moucheture. Il eſt du moins conſtaté, que la Pintade peut produire avec la poule, & les mâles iſolés ſont trés-ardents. Le Phaiſan encore eſt trés-fécond avec la Poule, & les Coquards qui proviennent de ce melange, ſurpaſſent la taille de leurs parents. D'autres eſpéces de Poules de bois peuvent avoir contribué jadis à former nôtre volaille domeſtique, dont on a même de nos jours obſervé la fécondité avec le Canard. (*k*) — L'on connait enfin les batards qui

(*k*) Cet exemple etonnant ſe trouve raporté par un auteur moderne (*Taubens Beytraege zur Naturgeſch. des Herzogth. Zelle II Band p.* 257.) digne de croyance & qui donne tant de particularités, qu'on ne ſauroit douter du fait. Un Canard ſeul dans une baſſecour, accueilla les careſſes d'un Coq. De ſes oeufs couvés naquirent ſix petits à bec inégal & lesquels avoient l'inſtinct de ſe jetter à l'eau quoique dé-

qui ſont ſi faciles à obtenir en joignant le Serin de Canarie au Chardonneret & à d'autres eſpéces collatérales, & dont l'iſſue eſt féconde par elle même, quoiqu'elle ne donne pas une race conſtamment diſtincte.

De tout temps le choix des individus deſtinés à multiplier, a principalement influé ſur la conſervation des races parmis les quadrupédes & les oiſeaux domeſtiques & ſur ce qui eſt, ou que nous appellons annobliſſement des races, quoique ce ſoit ſouvent l'abatardiſſement des qualités naturelles. L'experience des oeconomes en cela a fixé anciennement des régles, & quelques eſpéces, ſurtout le Cheval, ſont effectivement devenues, ſous l'empire de l'homme, plus grandes, plus vigoureuſes & plus belles que dans leur état ſauvage. Mais ce n'eſt qu'à force de ſoins, en choiſiſſant les circonſtances favorables, en croiſant les individus deſtinés aux haras, qu'on ſoutient la nobleſſe des belles races, qui ſans cela ſe rapprocheroient bientôt du ſauvageon. Et generalement dans toutes les eſpéces domeſtiques on voit clairement, tant par les métis, que par l'annobliſſement des races, que *l'influence des forces génératives* ſurpaſſe & balance toutes les autres cauſes qui peuvent changer l'exterieur des animaux. C'eſt ainſi que l'introduction de Béliers de bonne race corrige, dés la prémiere, géneration, la toiſon des plus mauvais troupeaux, dans les climats les moins favorables; c'eſt ainſi que le Bouc d'Angora a propagé ſon poil ſoyeu en Suéde

dépourvus de membranes aux pieds. — Les métis raportés par *Pennant* (*Hiſt. of quadr. p. 272.*) qu'un Chat tigré hydrophile de Bengale produiſit avec le Chat domeſtique, conſerverent auſſi l'inſtinct du pére de ſe jetter à l'eau ſans crainte.

Suéde & soutient ce caractére pendant plusieures générations; tout comme on voit en Russie des Etalons à poil crêpu & laineu donner à tous les Poulains, qu'ils produisent, avec leur couleur, une toison semblable. Mais ces mêmes forces géneratives, surtout subsistantes dans toute leur pureté, le type formé par la fémelle n'étant pas alteré par quelque ferment vital étranger, maintiennent dans les animaux sauvages & dans quelques espéces domestiques les formes primitives, en opposition à toutes les influences de climat & de nourriture, & s'opposent aux dégeneratios & aux dégradations des espéces. S'il arrive qu'une déformation ou quelque surcroi de partie dévienne héréditaire, comme les exemples ne sont pas rares, la nature en liberté bientôt reprend ses droits & rétabli la forme prémiere, à moins qu'on ne cherche, dans les animaux domestiques, à conserver la race ainsi deformée, en assortissant les couples & affermissant par plusieures génerations le nouveau type; ce qui ne peut jamais arriver dans les espéces sauvages, ou les varietés sont trop rares pour se rencontrer ainsi. Il semble aussi, que l'instinct des fémelles, qui leur fait ordinairement préferer les mâles courageux, les plus parfaits & les plus masculins de leur espéce, aux beautés feminines, tend à conserver cette forme exterieure de l'espéce, dont les mâles sont pour ainsi dire la charge, & qui devient arrondie & imparfaite à plusieurs égards, ou comme ébauchée dans les fémelles de la plûpart des animaux, ainsi que dans les mâles faibles ou ces étres sans sexe qu'on appelle hermaphrodites, & qui ne sont que des mâles manqués. De ces seules forces génératives dépend cet *air de famille* qu'on remarque sur les visages & dans les

contours des têtes de nations entiéres qui ne se sont pas mésalliées par le voisinage, les migrations ou les conquétes; comme les Calmoucs & les autres peuplades Mongoles en sont un exemple frapant au milieu du continent de l'Asie & entourées de nations d'un caractére de physionomie tout different. Je suis trés-persuadé, que la couleur & la laine des Négres tient plus à cette cause qu'au climat: puisque l'on voit des peuples basanés & à chevelure, sous le même climat avec les Négres; & des Négres dans toute la force du mot habiter des Isles temperées de la Mer du Sud: & ce n'est que par cette même force que des variations aussi bien empreintes ou produites au moyen du climat ou de quelqu' autre influence, qui a operé pendant une longue suite de siécles, s'alterent au mélange à la prémiere & se détruisent presque à la séconde ou troisième géneration; tandis qu'elles resistent à tous les autres correctifs.

Si la Nature a donc empeché par les barriéres insurmontables de l'instinct, par la sterilité des métis & des individus faibles ou imparfaits, & par la distribution enfin des espéces en differentes parties de la terre, que l'adulteration de ces facultés, qui propagent & conservent la pureté des espéces, ne puisse presque jamais arriver parmis les animaux sauvag. ; si les especes spontanées ne se sont pas melées, ou du moins n'ont pû produire des races parmanentes, comme les accouplements melés de certains insectes le prouvent encore tous les jours: alors il faudra rénoncer à cette dégeneration supposée d'espéce, que nulle autre influence ne seroit assez puissante pour produire & il faut admettre, pour toutes les espéces que nous con-

connoiſſons comme ſuffiſament diſtinctes & conſtantes, une origine & une époque commune. Le mélange fécond, que l'art peut obtenir de quelques unes de ces eſpéces primitives, ne ſera donc pas une raiſon pour les juger de race ou d'origine commune, lorsque ces deux eſpéces propagent bien diſtinctement dans l'état ſauvage par des individus des deux ſexes, & lorsque ces deux ſexes réunis different eſſentiellement par quelques caractéres conſtants du type des eſpéces voiſines.

Les déviations au contraire du type des eſpéces, qui ſe manifeſtent dans la ſuite des génerations, ſans que l'unité de l'eſpéce en ſoit alterée, ſont proprement *les varietés naturelles*, bien moins fréquentes, ſurtout parmis les animaux ſauvages, que les inconſtances de ces eſpéces factices & domeſtiques, que je viens de traiter. Le plus ſouvent ces varietés ne ſont qu'*individuelles*; quelquefois elles *tiennent à des races entiéres* & ſubſiſtent autant que la cauſe qui les produit, ou que l'impreſſion qui en réſulte ſur le type de la géneration, n'eſt pas effacée. — L'on peut appeller *varietés accidentelles* les prémiéres; & les autres *varietés de race.* Celles-ci ſont ordinairement dues au climat & à la nourriture, & pour la plûpart n'alterent que la couleur & la taille, ou tout au plus quelques petites proportions. Quelquefois ce ſont des effets d'une monſtruoſité ou d'une maladie rendue héreditaire; mais cela n'a presque lieu, que parmis les eſpéces devenues domeſtiques. Les *varietés accidentelles* comprennent non-ſeulement les couleurs & autres qualités de la peau extraordinaires, ſoit innées ou changées même aprés la

naiſſance; mais auſſi les défauts ou ſurcrois de ſtructure, & de proportion en differentes parties du corps & même, dans le ſens le plus étendu, toutes les monſtruoſités de naiſſance. Nous paſſerons en révue toutes ces differentes déviations de la Nature dans la ſéconde Partie de ce Mémoire.

ÉTÉ

ÉTÉ de 1780.

d'après les obſervations faites à St. Pétersbourg ſelon le nouveau Stile.

1.

La Néva fut dégagée des glaces le 21 Avril par une température de 145 degrés de Delisle: le Baromètre montant depuis 28, 10 jusqu'à 28. 57 c'eſt à dire 28 $\frac{57}{100}$ pouces de Paris. Les glaçons du Ladoga parurent le 29 Avril & la rivière continua de les charier jusqu'au commencement de Mai. La riviere reſta navigable pendant 214 jours & fut repriſe le 21 Novembre par un froid de 165 d. Baromètre 27. 77; après avoir charié des glaces depuis le 17 Novembre par un froid presque continuel de 160 degrés, & plus.

2.

Il géla pour la dernière fois le 5 Mai, Thermomètre de Delisle 152 d. Baromètre 28. 20. Il recommença à géler le 27 Septembre Therm. 152 d. Barom. 28.

28, 10. L'intervalle entre ces deux termes eſt de 145 jours.

3.

Depuis le 1er Mai jusqu'au 1er Octobre, la plus grande chaleur a été de 109 degrés le 26 Juillet après midi, Baromètre 27. 90, vent du Sud, ciel couvert, & vers le ſoir pluie & orage. Le plus grand froid ou la moindre chaleur 153 d. le 28 Septembre matin, Barom. 28. 12, vent du Nord & ciel nubileux.

4.

Pendant cet intervalle de cinq mois, ou 153 jours d'été; la chaleur a été à midi plus grande que 110. d. un ſeul jour le 26 Juillet.

Elle a été trouvée 23 jours (*) entre 120 & 110 d.
86 jours entre 130 & 120 —
35 jours entre 140 & 130 — &
8 jours (**) entre 150 & 140 —

(*) le 17. 21. 30 Juin, le 1. 2. 7. 17 — 25. 27. 28. 29. 31 Juillet & le 1. 5. 6. 8 Août

(**) le 2. 4 Mai, le 5 Juin & le 26 — 30 Septembre.

5.

Enſuite le froid, pendant ce même intervalle, a été, au matin & au ſoir 6 jours plus grand que 150 degrés, (*) Il a été 33 jours entre 140 & 150 d.
75 jours entre 130 & 140 —
34 jours entre 120 & 130 — &
5 jours entre 110 & 120 — (**).

(*) le 4. 5 Mai & le 27 — 30 Septembre

(**) le 21 — 25 Juillet.

6.

6.

La chaleur moyenne du midi a été trouvée pour le mois de Mai - - - - 131 degrés.

le mois de Mai	- - - -	131 degrés.
Juin	- - - -	126 —
Juillet	- - - -	119 —
Août	- - - -	125 —
Septembre	- - - -	133 —

ainsi depuis le 1er Mai jusqu'au 1er Octobre elle peut être estimée de 127 degrés de Delisle.

Ensuite la chaleur moyenne du matin s'est trouvée

en Mai	- - - - -	141 degrés.
Juin	- - - - -	133 —
Juillet	- - - - -	126 —
Août	- - - - -	133 —
Septembre	- - - - -	141 —

Par conséquent depuis le 1er Mai jusqu'au 1er Octobre, elle a été de 138 degrés de Delisle.

7.

Etat du Baromètre depuis le 1er Mai jusqu'au 1er Octobre.

La plus grande élévation 28. 53, le 18 & 19 Septembre avant midi. Therm. 128, ciel serein & calme.

La plus petite élévation 27. 23, le 5 Juin vers midi, Therm. 143, vent très fort de S-Ou, ciel couvert, pluie, & un peu de neige.

La plus grande variation 1. 30.

Le milieu 27. 88 &

La hauteur moyenne 28. 04 ou 28 $\frac{4}{100}$ pouces.

Cette hauteur moyenne du Baromètre étoit en

Mai	-	-	-	-	28. 01	pouces
Juin	-	-	-	-	27. 89	—
Juillet	-	-	-	-	28. 01	—
Août	-	-	-	-	28. 16	—
Septembre	-	-	-	-	28. 11	—

Le Baromètre a été pendant ces cinq mois, ou 153 jours d'été

129 jours au dessus de 27. 80
113 jours au dessus de 27. 90
94 jours au dessus de 28. 00
63 jours au dessus de 28. 10 &
40 jours au dessus de 28. 20

8.

Depuis le 1er Mai jusqu'au 1er Octobre, on a annoté 42 jours de calme parfait :

le 5 — 10. 14. 15. 16. 18. 24. 30. 31 Mai
le 14 — 17. 21. 22. 27. 30 Juin
le 5. 10. 17 — 21. 25 Juillet
le 20 — 23 Août &
le 6. 8 — 13. 19. 21 Septembre

Ensuite 43 jours de vent fort & nommément

du Nord, le 4 Mai, 18 Juin & 24 Sept.
de N-E, le 5. 6. 7. 18 Août

de

de l'Eſt, le 4 Juin & 30 Sept.
du Sud, le 8 Juin, 12. 26 Juillet & 31 Août
de S-Ou, le 19 Mai & le 1. 2. 22 Septembre
de l'Oueſt le 1. 20 Mai, 2. 9. 10. 11. 19 Juin, 1. 27. 29. 30 Juillet, 25. 27 Août & le 17 Sept.
de N-Ou., le 12. 22. 23 Mai, 13 Juin, 2. 31 Juillet 8. 10. 11 Août & le 16. 25. 26. Sept.

Enfin 7 jours de vent très fort: ſavoir
de S-Ou., le 5 Juin & 23 Sept.
de l'Oueſt, le 1. 3 Juin & 12. 26. 30 Août.

9.

Etat de l'Atmoſphère pour ces cinq mois d'été depuis le 1er Mai juſqu'au 1er Octobre.

Etat de l'Atmoſphère en	Mai	Iuin	Iuill.	Août.	Sept.	Somme.
jours entierement ſereins	10	10	10	10	10	50
jours entierement couverts	5	4	3	5	5	22
Brouillards - - -	7	0	1	2	7	17
Il plut - - - -	10	5	7	7	6	35
& en abondance	4	3	5	2	4	18
Il neigea - - -	1	1	0	0	3	5
Il grêla - - -	0	0	1	0	1	2
Orages de loin - -	1	0	5	1	0	7
de plus près - -	1	0	3	1	0	5

Il neigea pour la derniere fois, le 5 Juin matin, Therm. 143, Barom. 27. 25, vent très fort du S-Ou, & pluie.

Il recommença à neiger le 26 Septembre après midi, Therm. 146, Barom. 28. 13, ciel couvert vent N-Ou. L'intervalle entre la derniere & la premiere neige n'eſt donc que de 113 jours.

La hauteur de l'eau de pluie tombée depuis le 12 Avril jusqu'au 12 Octobre a été obſervée de 9¼ pouces de Paris.

Il tonna pour la premiere fois le 17 Maï après-midi, Thermom. 124, Barom. 27. 82, vent d'Oueſt & beaucoup de pluie.

Et pour la derniere fois le 27 Août avant midi, Thermomètre 136, Barom. 27. 83, vent fort de l'Oueſt & pluie. L'Intervalle entre le premier & le dernier orage eſt de 102 jours.

VO-

VOYAGE ACADÉMIQUE.

M. le Directeur de l'Académie des Sciences ayant accordé à M. le Professeur *Lexell* la permission de voyager pendant un an dans les pays étrangers, S. E. souhaita que cet Académicien reglât son voyage ensorte que l'Académie en pût tirer quelque utilité: il chargea conséquemment M. *Lexell* de tourner ses regards particulierement sur les points suivans.

1. Comme il ne manquera pas de visiter les principaux observatoires qui ne se trouvent pas trop éloignés de sa route en Allemagne, en France & en Angleterre, il aura soin de s'informer des détails de leur construction, & en cas qu'il en rencontre qui soient très remarquables, il s'en procurera des plans & des dessins.

2. Il s'informera du nombre & de l'état des instrumens qui se trouvent à ces observatoires, & lorsqu'il en trouvera d'une construction singuliere il tâchera d'en acquerir les descriptions & les dessins.

3. Il aura soin de rechercher dans les endroits par où il passera, & surtout à Londres, les nouveaux in-

ſtrumens de Mathématiques & de Phyſique qui s'y fabriquent, & lorsqu'il en trouvera de très intereſſans, il en fera ſon rapport à l'Académie.

4. Dans les lieux principaux de ſa route comme à Berlin, Paris & Londres, il prendra des informations de tout ce qui appartient à la compoſition des Cartes Géographiques, Hydrographiques, Minérographiques & Militaires, & il tâchera d'obtenir des notices de celles de ces cartes, plans ou deſſins, qui ont nouvellement paru. Enfin

5. Il entretiendra avec l'Académie une correſpondance réguliere & lui fera part de toutes les nouvelles intéreſſantes qu'il apprendra durant ſon voyage par rapport aux Sciences & aux Arts.

Mr. *Lexell* partit en Juillet: il s'arrêta principalement à Berlin, Paris & Londres & il s'acquitta de toutes les ſusdites commiſſions à la grande ſatisfaction de l'Académie. De Londres il rétourna par la Hollande, la baſſe Saxe, & la Suède & il revint à St. Pétersbourg vers la fin de 1781.

MORT.

L'Académie a perdu dans le courant de ce ſémeſtre un des ſes plus anciens Aſſociés externes: ſavoir

M. *Jerome David Gaubius*, Premier Medecin du Prince-Stadthouder & ancien Profeſſeur de Médécine & de Chymie à Leyden.

Il étoit né à Heidelberg en 1705 le 24 Janvier: il fut reçu au nombre des Académiciens externes en 1754 le 18 Août

Août & il mourut le $\frac{18}{29}$ Novembre 1780. Il s'est rendu célèbre par plusieurs ouvrages estimables aussi bien que par sa sagacité singulière à traiter les malades, & il a été universellement régretté.

ASSOCIÉS EXTERNES NOUVEAUX
proclamés à l'Assemblée publique du 19 Septembre, après avoir été reçus unanimement dans la séance ordinaire du 11. Septembre.

1. M. *Paul Thierry d'Holbach*, Baron de Heeze, Seigneur de Lende, Walber, Osteryk etc. de l'Académie royale des Sciences & Belles-Lettres de Prusse, à Paris.

2. M. *Joseph Pristley* Docteur en droit: de la Societé royale des Sciences de Londres & de l'Académie royale des Sciences de Stockholm, à Londres.

3. M. *Joseph Banks* Esqr. de la Societé royale des Sciences de Londres, de l'Académie royale des Sciences de Stockholm & de celle de Lund: Correspondant de l'Académie royale des Sciences de Paris, à Londres.

4. M. *Nicolas Jacques Jacquin*, Docteur en Médecine, Conseiller des Mines & Monnoyes de L. L. M. M. Imp. & Royale, Professeur de Chymie & de Botanique à Vienne.

5.

5. M. *Paul Henri Gerard Möhring* Docteur en Médecine & Médecin du Corps de S. A. Msgr. le Prince d'Anhalt Zerbst: Membre de l'Académie Impériale des Curieux de la Nature. à Jewern &

6. M. *Jean Reinhold Forster*, Docteur en Droit, Professeur d'Histoire naturelle à l'Université de Halle: de la Societé royale des Sciences de Londres, de celle de Göttingue, des Académies royales de Madrit & d'Upsale, des Societés des Amis Scrutateurs de la Nature de Berlin & de Dantzig. Correspondant de l'Académie royale des Sciences de Paris. à Halle.

OUVRA-

OUVRAGES, MACHINES ET INVENTIONS,

présentées ou communiquées à l'Académie pendant le cours du dernier sémestre de l'Année 1780.

Dans l'Assemblée du Vendredi 3 Juillet; le Secrétaire de Conférences *Jean Albert Euler* a présenté un manuscript intitulé

> Le Prononciateur, ou Dissertation sur le nombre & la génération des sons simples de la voix humaine avec cette devise:
>
> Phoenices primi, famae si creditur, ausi
> Mansuram rudibus vocem signare figuris.
>
> *Lucanus.*

L'Auteur dans une lettre adressée au Secrétaire, désire que l'Académie fasse examiner son ouvrage 1.) comme renfermant une invention nouvelle pour faciliter la prononciation des langues; 2.) comme donnant en abrégé une idée de la Nature & de la formation des voyelles, ce qui répond à la premiere partie de la question proposée par l'Académie pour le prix de cette année. (*)

(*) S. E. M. le Conseiller d'Etat actuel *de Steblin*, qui s'étoit chargé de l'examen de cet ouvrage, en a fait son rapport dans une des séances suivantes: il

il y rend justice à la pénétration de l'auteur, mais ajoute en même tems, que tout ce qui y est dit, se trouve déja amplement discuté & presque épuisé dans l'excellent Traité de la formation méchanique des langues par M. le Président *de Brosses*, dont l'Auteur du Prononciateur ne paroit avoir eu aucune connoissance.

Le 6. Juillet. M. *Pierre Oehmann*, horloger de la cour royale de Suéde a fait soumettre à l'examen de l'Académie une Pendule à musique, jouant à la fois la Harpe & la Flute. (**)

(**) Mrs. les Académiciens *Krafft* & *Lexell*, avec l'Adjoint *Fuss*, ayant été nommés pour examiner cette piece d'horlogerie, ont rapporté qu'elle est un chef d'oeuvre de justesse & de beauté: qu'il y a même dans l'intérieur du méchanisme des mouvemens de nouvelle invention supérieurs à ceux qu'on employe communément pour ces sortes de pendules, & que la musique est agréable & parfaitement bien exécutée.

Le 15. Juillet. M. le Prof. *Güldenstädt* a présenté de la part de M. *Hablitzl* Correspondant de l'Académie à Astrachan

1. pour le Cabinet d'Histoire naturelle, un poulet monstrueux à trois pieds, & deux foetus de Gerboise, *Muris Jaculi*, conservés dans des fioles remplies d'esprit de vin.

2. Pour

2. Pour le jardin botanique, deux pacquets d'oignons: *Bulbi Tulipae biflorae & Bulbi crini caspii.*

Le 14. Août. Le Secrétaire a présenté de la part de l'Académie royale des Sciences de Stockholm.

Kongl. Vetenskaps Academiens Handlingar för Ar 1779.

Regifter öfver X Tomes af Kongl. Vetenskaps Academiens Handlingar för Are 1770-1779.

Lexicon Lapponicum cum interpretatione vocabulorum Sueco-latina & indice Suecano Lapponico etc. a *Joh. Ihre*, nec non auctum Grammatica Lapponica a D. *Erico Lindahl* et *Johanne Oehrling.* Holmiae 1780.

Charta öfwer Soedra Delen af Swerige, af *Nils Marelius.*

Le 17. Août. Le Secrétaire a lu & remis un écrit intitulé:

Projet de Correspondance entre les différentes Académies, Societés littéraires des arts & des moeurs de l'Europe & la Societé Patriotique de Heffe-Hombourg,

accompagné d'une lettre par laquelle Meffieurs les membres compofans le Chef-Comité de cette Societé invitent ceux de l'Académie Impériale des Sciences, à feconder leur vuës & à participer à leur entreprife, en nommant quelqu'un d'entr'eux, qui au nom de toute l'Académie foit chargé de la Correspondance. L'Académie a accepté l'invitation & engagé le Secrétaire à correspondre avec le Chef-comité de la Societé Patriotique.

— il a lu une lettre de M. *Preuschen*, Ecclésiastique à Carlsruh, connu par son invention de la Typométrie, qui annonce qu'il vient d'inventer encore un Instrument météorologique, au moyen duquel un observateur peut reconnoître la marche, direction & vîtesse des nuages, leur élévation; la direction & la vitesse des vents tant horizontaux qu'obliques, la quantité de l'eau de pluie & plusieurs autres variations météorologiques.

Le 28. Août. M. le Conseiller de Mines *Laxmann* a présenté de la part de l'Auteur:

Nath. Godofredi Leske Additamenta ad *Jacobi Theod. Klein* naturalem dispositionem Echinodermatum et lucubratiunculam de aculei Echinorum marinorum.

Le 4. Septembre. Le Secrétaire a présenté de la part de la Societé russe fondee par l'Université Impériale à Moscou, le cinquieme volume de ses mémoires qui paroissent in 8vo, sous le titre

Опытъ трудовъ вольнаго россїйскаго собранїя.

— il a lu une lettre de M. *Jean Bernoulli*, Astronome royal à Berlin, qui envoye à l'Académie

A sexcentenary Table &c. by *John Bernoulli*.

que le Bureau des Longitudes à Londres a jugée assés utile dans les calculs astronomiques pour faire les fraix de l'impression, & récompenser l'Auteur.

Le 11. Septembre. Le Secrétaire a lu une lettre adressée au Directeur par M. *Collignon* Avocat en Parlement

ment à Dieuze en Lorraine, qui envoye & soumet à l'approbation de l'Académie

Essay de Bien-public, ou mémoire raisonné pour lever à coup sur, tous les obstacles qui s'opposent à l'execution des défrichemens & dessechemens; faire mettre en valeur, par des moyens simples & avantageux à tout le monde, toutes les terres & fonds incultes quelconques & pour perfectionner l'art de l'Agriculture: imprimé à Neuchatel en 1776.

Le 19. Septembre. Assemblée publique; voyez ci-dessus.

Le 21. Septembre. Le Secrétaire a ouvert un Pacquet adressé à l'Académie qui contenoit

Observationes anatomico-Pathologicae

Ouvrage en trois volumes in 4to que l'Auteur, *Eduard Sandifort*, Docteur en médicine & Professeur à Leiden envoye en présent.

—— —— M. le Prof. *Güldenstaedt* a fait voir un Corsac vivant, espèce de petit rénard, que le Correspondant de l'Académie M. *Hablitzl* a envoyé d'Astrachan.

Le 25 Septembre. Le Secrétaire a remis de la part de M. le Prof. *Spielmann* de Strasbourg quatre Dissertations imprimées & défendues sous sa présidence

1. Historia aëris factitii
2. Historiae aëris factitii pars medica

3. De causticitate

4. Analecta de Tartaro

Le 9 Novembre. M. le Prof. *Güldenstaedt* a lu des lettres du Correspondant M. *Hablitzl'* à Astrachan, qui contiennent des détails intéressans sur les sauterelles qui cette année ont dévasté les champs aux environs d'Astrachan. Dans le temps de la caducité des ces insectes arriverent en grand nombre des oiseaux de l'espece de corbeaux nommée *corvus cayocatactes* L. que personne ne se souvient d'avoir jamais vus dans ces contrées, & qui devoroient avec avidité les sauterelles après les avoir dépouillées de leurs têtes & extrémités: M. *Hablitzl'* a joint à ses lettres l'envoi d'un des ces oiseaux empaillé & d'une collection d'insectes qu'il a faite pendant ce dernier été.

—— —— Le Secrétaire a présenté de la part de l'Auteur

Traité de l'élasticité de l'eau & d'autres fluides par M. *Zimmermann* Professeur de Mathématiques au Carolinum à Bronswig.

Le 13 Novembre. Le Secrétaire a présenté de la part de l'Académie royale des Sciences de Paris

Histoire de l'Académie royale des Sciences: Année 1776 avec les mémoires de la même année

Mémoires présentés à l'Académie par les Savans étrangers Tom. VIII & IX

& de la part de M. *l'Abbé Rozier*

Jour-

Journal de Physique, 14 cahiers depuis Avril 1779 jusqu'au Mai 1770.

Le 27 Novembre. M. le Prof. *Lepechin* a présenté & distribué de la part de l'Auteur plusieurs exemplaires d'un Dictionnaire des végétaux que M. l'Assesseur *Condratowisch* a fait imprimer en russe sous le titre

Дикцїонеръ о разныхъ произращенїяхъ

—— —— Le Secrétaire a lu une lettre de M. *Canterzani*, Secrétaire perpétuel de l'Institut de Bologne, qui envoye un avis fort important aux marins, dans lequel un amateur de la Chymie offre une nouvelle machine très simple & d'un petit volume, au moyen de laquelle on peut sans employer beaucoup de temps dessaler & rendre potable l'eau de la mer. L'Académie l'a fait parvenir à S. E. Mr. le Comte *Ivan Tschernischef*.

Le 4 Décembre. Le Secrétaire a présenté

Deutliche und gründliche Anleitung zur Salmiac-Fabrik que l'Auteur M. *le D. Alberti* Physicien à Conitz dans la Prusse occidentale, a dédié aux Académies des Sciences de St. Pétersbourg & de Berlin.

Le 18 Décembre. Le Secrétaire a lu une lettre addressée à l'Académie Impériale par Messieurs de l'Académie Electorale Palatine établie à Mannheim, qui envoyent leurs mémoires, dont ils avoient déja publié six volumes sous le titre suivant.

Histo-

Hiſtoria & commentationes Academiae Electoralis Scientiarum & elegantiorum litterarum *Theodoro Palatinae.*

—— —— M. le Prof. *Güldenſtaedt* a préſenté de la part de M. *Hablitzl'* un pacquet de diverſes ſemences pour le jardin botanique & des obſervations ſur les oiſeaux de paſſage, deſtinées à être imprimées à la ſuite du dernier volume des voyages faits par feu M. *Gmelin.*

Le Secrétaire a préſenté tous les mois les obſervations météorologiques faites à Berlin par M. l'Académicien *Béguelin* & à Moscou par M. l'Aſſeſſeur *Engel.*

MATHE-

MATHEMATICA.

DE ELLIPSI MINIMA DATO PARALLELOGRAMMO RECTANGVLO CIRCVMSCRIBENDA.

Auctore
L. EVLERO.

Cum omni rectangulo infinitae ellipses circumscribi queant, quaestiones non parum curiosae videntur, quibus inter has ellipses vel ea quaeritur, cuius area futura sit minima, vel ea, quae minimam habitura sit perimetrum. Prior quidem nulla prorsus laborat difficultate; solutio tamen nihilominus attentione digna videtur; verum altera quaestio de perimetro maxime est ardua, ita vt eius vix solutionem perfectam exspectare liceat. Eo magis igitur vtile erit, conatus eam resoluendi in medium adferre.

Problema I.

Tab. I. Fig. I.

§. I. *Circa datum rectangulum* M m N n *eam ellipsin* A a B b *describere, cuius area sit omnium minima.*

Solutio.

Posito centro tam rectanguli quam ellipsis in puncto C vocentur semisses laterum rectanguli $CF = f$ et $CG = g$;

 semi-

ſemiaxes vero ellipſis ſint C A $= a$ et C B $= b$; et quoniam punctum N in ipſa ellipſi eſt ſitum, ex elementis conſtat fore $\frac{f^2}{a^2} + \frac{g^2}{b^2} = 1$. Cum nunc area ellipſis ſit $= \pi\, a\, b$; quantitates a et b ita definiri oportet, vt differentiale areae euaneſcat, ſumtis ſcilicet ſemiaxibus a et b variabilibus; vnde nanciſcimur $a\, d\, b + b\, d\, a = 0$, ſiue $d\, a : d\, b = a : - b$, quare ipſa illa aequatio $\frac{f^2}{a^2} + \frac{g^2}{b^2} = 1$, differentietur et loco $d\, a$ et $d\, b$ ſcribantur proportionalia a et $- b$, ac prodibit $\frac{g^2}{b^2} = \frac{f^2}{a^2}$, hincque deducimus $\frac{2 f^2}{a^2} = 1$, ideoque $a = f \sqrt{2}$ et $b = g . \sqrt{2}$. Definitis autem ſemiaxibus ipſa ellipſis facillime deſcribitur.

Corollarium.

§. 2. Cum hinc ſemiaxes lateribus rectanguli prodierint proportionales, ſitque $a : b = f : g$; euidens eſt, ſi ducantur rectae A B et F G, eas inter ſe fore parallelas; qua conditione ellipſis iam determinatur.

Scholion.

§. 3. Expedita igitur priore quaeſtione, alteram ne ſuſcipere quidem licet, niſi ante in genere cuiusque ellipſis perimeter per ſeriem infinitam ita commode exprimatur, quae pro omnibus ſpeciebus quam maxime conuergat. Etſi autem iam plures huiusmodi ſeries inueniri queant; tamen vix vlla reperietur, quae ſequenti, quam ſum daturus, palmam praeripiat.

Lemma.

§. 4. Inuenire ſeriem maxime conuergentem, quae datae ellipſis perimetrum exhibeat.

Sit

Sit quadrans ellipsis propositae A M B, cuius centrum in C et semiaxes $CA = a$ et $CB = b$. Ex centro C semiaxe maiore C A superstruatur quadrans circuli A L D, cuius ergo radius $AC = a$, ducaturque radius quicunque C L; tum vero ducatur adplicata L P, ellipsin in puncto M intersecans, pro quo vocentur coordinatae $CP = x$ et $PM = y$; et posito angulo $ACL = \Phi$ colligimus $CP = x = a.\cos.\Phi$ et $PL = a.\sin.\Phi$. Quia vero est $CD : CB = PL : PM = a : b$, habebimus $y = b \sin.\Phi$, vnde fit $dx = -a\,d\Phi.\sin.\Phi$ et $dy = b\,d\Phi.\cos.\Phi$, hincque elementum ellipticum

Tab. I. Fig. 2.

$$d\Phi.\surd(a^2 \sin.\Phi^2 + b^2 \cos.\Phi^2);$$

quocirca integrando arcus ellipticus A M erit

$$= \int.d\Phi.\surd(a^2 \sin.\Phi^2 + b^2.\cos.\Phi^2),$$

integrali ita sumto, vt euanescat posito $\Phi = 0$. Hinc vero ipse quadrans ellipticus A M B reperietur, statuendo $\Phi = 90$. Sicque totum negotium ad idoneam integrationem formulae

$$d\Phi\surd(a^2 \sin.\Phi^2 + b^2 \cos.\Phi^2)$$

reducitur. Cum autem sit

$$\sin.\Phi^2 = \frac{1 - \cos.2\Phi}{2} \text{ et } \cos.\Phi^2 = \frac{1 + \cos.2\Phi}{2}$$

nostra formula integranda abibit in hanc:

$$\int d\Phi.\surd.\left(\frac{a^2 + b^2}{2} - \frac{(a^2 - b^2)}{2}\cos.2\Phi\right)$$

quam concinniorem reddemus, ponendo

$$a^2 + b^2 = c^2 \text{ et } \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} = n;$$

tum enim erit arcus

$$AM = \frac{c}{\surd 2}\int.d\Phi\surd(1 - n\cos.2\Phi)$$

a qua igitur simplici formula rectificatio ellipsis pendet. Conuertamus ergo hanc formulam irrationalem in seriem,

 quae

quae erit

$$\sqrt{(1 - n. \text{cof. } 2\Phi)} = 1 - \tfrac{1}{2}. n. \text{cof. } 2\Phi$$
$$- \tfrac{1.1}{2.4} n^2. \text{cof. } 2\Phi^2 - \tfrac{1.1.3}{2.4.6} n^3 \text{cof. } 2\Phi^3$$
$$- \tfrac{1.1.3.5}{2.4.6.8} n^4 \text{cof. } 2\Phi^4 - \text{etc.}$$

Ad has integrationes peragendas in fubfidium vocemus hanc reductionem:

$$\int d\Phi. \text{cof. } 2\Phi^{\lambda+2} = \tfrac{\lambda+1}{\lambda+2} \int d\Phi. \text{cof. } 2\Phi^{\lambda}$$
$$+ \tfrac{1}{2\lambda+4} \text{fin. } 2\Phi. \text{cof. } 2\Phi^{\lambda+1},$$

vbi terminus poftremus cafu $\Phi = 0$ fponte euanefcit, ita vt nulla conftante opus fit adiicienda. Extendamus autem pro inftituto noftro hanc integrationem vsque ad $\Phi = 90$, quo fit $2\Phi = 180°$, ac denuo euanefcet terminus ille abfolutus; quocirca reductio noftra erit

$$\int d\Phi. \text{cof. } 2\Phi^{\lambda+2} = \tfrac{\lambda+1}{\lambda+2} \int. d\Phi. \text{cof. } 2\Phi^{\lambda}$$

cuius ope ex binis terminis primoribus noftrae feriei fequentes omnes facillime integrabuntur, a termino fcilicet $\Phi = 0$ vfque ad $\Phi = 90° = \frac{\pi}{2}$; quemadmodum fequens tabula declarat.

$$\int. d\Phi = \Phi \quad = \quad \tfrac{\pi}{2}$$
$$\int. d\Phi \text{ cof. } 2\Phi \quad = \quad 0$$
$$\int. d\Phi. \text{cof. } 2\Phi^2 = \tfrac{1}{2}.\tfrac{\pi}{2}$$
$$\int d\Phi. \text{cof. } 2\Phi^3 = 0$$
$$\int d\Phi. \text{cof. } 2\Phi^4 = \tfrac{1}{2}.\tfrac{3}{4}.\tfrac{\pi}{2}$$
$$\int d\Phi. \text{cof. } 2\Phi^5 = 0$$
$$\int d\Phi. \text{cof. } 2\Phi^6 = \tfrac{1.3.5}{2.4.6}.\tfrac{\pi}{2}$$
$$\int d\Phi. \text{cof. } 2\Phi^7 = 0$$
$$\int d\Phi. \text{cof. } 2\Phi^8 = \tfrac{1.3.5.7}{2.4.6.8}.\tfrac{\pi}{2}$$

etc.

His

His igitur valoribus introductis quadrans noster ellipticus prodibit

$$AMB = \frac{\pi c}{2\sqrt{2}}\left(1 - \frac{1.1}{2.4}\cdot\frac{1}{2}n^2 - \frac{1.1.3.5}{2.4.6.8}\cdot\frac{1.3}{2.4}n^4 - \frac{1.1.3.5.7.9}{2.4.6.8.10.12}\cdot\frac{1.3.5}{2.4.6}n^6 - \text{etc.}\right).$$

Quia hic singuli coëfficientes numerici praecedentes in se complectuntur, pro hac serie sequentem formam scribamus:

$$AMB = \frac{\pi c}{2\sqrt{2}}(1 - \alpha . n^2 - \alpha\beta . n^4 - \alpha\beta\gamma . n^6 - \alpha\beta\gamma\delta . n^8 - \text{etc.})$$

quarum litterarum valores ita progredientur:

$$\alpha = \frac{1.1}{2.4}.\frac{1}{2} = \frac{1.1}{4.4}$$

$$\beta = \frac{3.5}{6.8}\cdot\frac{3}{4} = \frac{3.5}{8.8}$$

$$\gamma = \frac{7.9}{10.12}\cdot\frac{5}{6} = \frac{7.9}{12.12}$$

$$\varepsilon = \frac{11.13}{14.16}\cdot\frac{7}{8} = \frac{11.13}{16.16}.$$

Pro ellipsi igitur, cuius semiaxes sunt a et b, ponendo breuitatis gratia

$$a^2 + b^2 = c^2 \text{ et } \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} = n,$$

quadrans perimetri exprimetur sequenti serie:

$$\frac{\pi c}{2\sqrt{2}}\left(1 - \frac{1.1}{4.4}.n^2 - \frac{1.1.3.5}{4.4.8.8}n^4 - \frac{1.1.3.5.7.9}{4.4.8.8.12.12}n^6 - \text{etc.}\right)$$

quae series semper admodum conuergit, quantumuis axes ellipsis fuerint inter se diuersi, quia semper n est vnitate minor, ac praeterea coëfficientes numerici vehementer decrescunt.

Corollarium.

§. 5. Casus, quo haec series minime conuergit, est, quo $n = 1$, quod euenit, vbi $b = 0$, seu vbi axis coniugatus euanescit; tum autem manifestum est, quadrantem ellipti-

ellipticum ipsi semiaxi $AC = a$ aequalem fore; vnde quia etiam $c = a$, habebimus pro hoc casu

$$\frac{2\sqrt{2}}{\pi} = 1 - \frac{1.1}{4.4} - \frac{1.1.3.5}{4.4.8.8} - \frac{1.1.3.5.7.9}{4.4.8.8.12.12} \text{ etc.}$$

quae series vtique attentione digna videtur, idque eo magis, quod terminis continuo colligendis praebeat sequentem insignem aequalitatem:

$$\frac{3.5}{4.4} \cdot \frac{7.9}{8.8} \cdot \frac{11.13}{12.12} \cdot \frac{15.17}{16.16} \text{ etc.} = \frac{2\sqrt{2}}{\pi}$$

ideoque

$$\frac{\pi}{2\sqrt{2}} = \frac{4.4}{3.5} \cdot \frac{8.8}{7.9} \cdot \frac{12.12}{11.13} \text{ etc.}$$

cuius veritas ex iis, quae olim de productis infinitis protuli, facile elucet.

Corollarium 2.

§. 6. Si seriem ante inuentam statuamus

$$1 - \frac{1.1}{4.4} n^2 - \frac{1.1.3.5}{4.4.8.8} n^4 - \text{etc.} = s$$

per ea, quae olim de summatione huiusmodi serierum ostendi, reperitur ista aequatio differentialis secundi gradus:

$$\frac{4 n d d s}{d n^2} + \frac{4 d s}{d n} + \frac{n s}{1 - n n} = 0$$

vbi dn pro constante est sumtum. Cum enim hinc sit

$$\frac{4 n d d s}{d n^2}(1 - n n) + \frac{4 d s}{d n}(1 - n n) + n s = 0,$$

si fingamus

$$s = 1 + A n n + B n^4 + C n^6 + \text{etc.}$$

erit vt sequitur:

$$\frac{4 n d d s}{d n^2} = 4.2.1.A.n + 4.4.3.B.n^3$$
$$- 4.2.1.A.n^3$$
$$+ 4.6.5.C.n^5 + 4.8.7.D.n^7 \text{ etc.}$$
$$- 4.4.3.B.n^5 - 4.6.5.C.n^7 \text{ etc.}$$

4. ds

$$\frac{4ds}{dn}(1-nn) = 4.2.An + 4.4.B.n^3 + 4.6.Cn^5$$
$$- 4.2A.n^3 - 4.4.B.n^5$$
$$+ 4.8.D.n^7 \text{ etc.}$$
$$- 4.6.C.n^7 \text{ etc.}$$

$$ns = n + A.n^3 + Bn^5 + C.n^7 \text{ etc.}$$

vnde ſequentes determinationes oriuntur:

$$0 = 4.4.A + 1; \text{ ergo } A = \frac{-1}{4.4};$$
$$0 = 4.4.4.B - 3.5.A; \text{ ergo } B = \frac{3.5}{8.8}A;$$
$$0 = 4.6.6.C - 7.9.B; \text{ ergo } C = \frac{7.9}{12.12}.B;$$
$$0 = 4.8.8.D - 11.13.C; \text{ ergo } D = \frac{11.13}{16.16}.C;$$

etc.

vnde eadem ſeries reſultat, quam ſupra inuenimus.

Problema 2.

§. 7. Circa datum rectangulum M m N n eam ellipſin deſcribere, cuius perimeter ſit minima.

Solutio.

Poſitis vt ante ſemilateribus rectanguli dati $CF = f$, $CG = g$, et ſemiaxibus ellipſis quaeſitae $CA = a$ et $CB = b$ habemus primo $\frac{f^2}{a^2} + \frac{g^2}{b^2} = 1$. Tum vero ſi ponamus

Tab. I. Fig. 1.

$$a^2 + b^2 = c^2 \text{ et } \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} = n,$$

quadrantem perimetri modo ante inuenimus

$$= \frac{\pi.c}{2\sqrt{2}}(1 - \alpha n^2 - \alpha\beta n^4 - \alpha\beta\gamma n^6 - \alpha\beta\gamma\delta n^8 - \text{etc.}),$$

exiſtente

$$\alpha = \frac{1.1}{4.4}; \ \beta = \frac{3.5}{8.8}; \ \gamma = \frac{7.9}{12.12}; \ \delta = \frac{11.13}{16.16}; \text{ etc.}$$

quae quantitas vt fiat minima, eius differentiale nihilo aequari debet, dum scilicet litterae c et n tanquam variabiles tractantur, vnde diuidendo per $\frac{\pi}{2\sqrt{2}}$ sequens nascetur aequatio:

$$\left.\begin{array}{l} dc(1-\alpha nn-\alpha\beta n^4-\alpha\beta\gamma n^6-\alpha\beta\gamma\delta n^8-\text{etc.}) \\ -cdn(2\alpha n+4\alpha\beta n^3+6\alpha\beta\gamma n^5+8\alpha\beta\gamma\delta n^7+\text{etc.}) \end{array}\right\}=0$$

quae hoc modo repraesentetur:

$$\frac{dc}{c}(1-\alpha n^2-\alpha\beta n^4-\alpha\beta\gamma.n^6-\alpha\beta\gamma\delta n^8-\text{etc.})$$
$$=\frac{dn}{n}(2\alpha n^2+4\alpha\beta n^4+6.\alpha\beta\gamma n^6+8.\alpha\beta\gamma\delta.n^8-\text{etc.})$$

Hic autem differentialia dc et dn certam inter se tenere debent relationem, quam ex aequatione fundamentali $\frac{f^2}{a^2}+\frac{g^2}{b^2}=1$, peti oportet. Hic igitur ante omnia loco a et b litteras c et n introduci conuenit. Cum enim sit

$$a^2+b^2=c^2 \text{ et } a^2-b^2=c^2.n, \text{ erit}$$
$$a^2=\tfrac{1}{2}c^2(1+n) \text{ et } b^2=\tfrac{1}{2}c^2(1-n);$$

vnde nostra aequatio abibit in hanc:

$$\frac{2f^2}{1+n}+\frac{2g^2}{1-n}=c^2.$$

Quia f et g dantur, ponamus breuitatis gratia

$$f^2+g^2=h^2 \text{ et } \frac{f^2-g^2}{f^2+g^2}=i, \text{ siue } f^2-g^2=h^2.i;$$

quo facto nostra aequatio erit $\frac{2h^2(1-in)}{1-nn}=c^2$, cuius sumamus logarithmos, eritque

$$l\,2h^2+l(1-in)-l(1-nn)=2.lc$$

quae aequatio differentiata dat

$$\frac{-idn}{1-in}+\frac{2ndn}{1-nn}=\frac{2dc}{c},$$

vnde fit

$$\frac{dc}{c}=\frac{ndn}{1-nn}-\frac{idn}{2(1-in)}=\frac{2n-i-inn}{2(1-in)(1-nn)}.dn$$

quo

quo valore ſubſtituto noſtra aequatio erit

$$(2n^2-in-in^3)(1-\alpha n^2-\alpha\beta n^4-\alpha\beta\gamma.n^6-\alpha\beta\gamma\delta.n^8 \text{ etc.})$$
$$=2(1-in)(1-nn)(2\alpha n^2+4\alpha\beta n^4+6\alpha\beta\gamma n^6 \text{ etc.})$$

in qua aequatione tantum duae inſunt quantitates i et n, quarum illa ex rectangulo datur, haec autem n ex illa debet definiri; quod ergo non aliter niſi reſolutione aequationis infinitae fieri poteſt. Conueniet igitur quantitatem n tanquam cognitam ſpectare indeque viciſſim i definire, quod ſi pro pluribus caſibus inſtituatur, facile iudicare licebit, quinam valor ipſius n cuiuis valori dato i reſpondeat.

Spectemus primo quantitatem n vt minimam, quippe cui etiam valor minimus ipſius i reſpondebit; reiectis ergo terminis β, γ, δ, etc. continentibus, habebimus

$$(2n^2-in-in^3)(1-\alpha n^2)=2(1-in)(1-nn).\ 2\alpha n^2$$

quae aequatio, reiectis poteſtatibus ipſius n tertio altioribus, abit in hanc:

$$2n^2-4\alpha n^2-in-in^3+5\alpha in^3=0,$$

vnde prodit

$$i=\frac{2n(1-2\alpha)}{1+n^2-5\alpha.n^2}.$$

Quare ſi n fuerit fractio valde parua, erit proxime

$$i=2n(1-2\alpha)=\tfrac{7}{4}.n$$

vnde viciſſim concludere licet, ſi i fuerit fractio quam minima, fore $n=\frac{4}{7}i$.

Nunc igitur aliquanto propius ad veritatem accedamus, reiiciendo poteſtates ipſius n quinta ſuperiores, eritque

$$2n^2-4\alpha n^2+2\alpha n^4-8.\alpha\beta n^4-in-in^3+5\alpha in^3=0,$$

 vnde

vnde elicitur

$$i = \frac{2n(1-2\alpha)+2\alpha n^3(1-4\beta)}{1+n^2-5\alpha n^2},$$

et diuidendo

$$i = 2n(1-2\alpha)+2\alpha n^3(1-4\beta) - 2n^3(1-2\alpha)(1-5\alpha),$$

qui valor, ob $\alpha = \frac{1}{16}$ et $\beta = \frac{15}{64}$, praebet

$$i = \tfrac{7}{4}.n - \tfrac{153}{128}.n^3,$$

vnde viciſſim pro dato i concludimus

$$n = \tfrac{4}{7}i + \tfrac{306}{2401}.i^3$$

ſicque vlterius ad veritatem accedere licebit.

Euoluamus adhuc caſum, quo n maximum obtinet valorem, qui vnitati eſt aequalis et ponamus breuitatis gratia

$$1-\alpha-\alpha\beta-\alpha\beta\gamma \ldots = s \text{ et}$$

$$2\alpha+4\alpha\beta+6\alpha\beta\gamma \ldots = t$$

vt habeamus hanc aequationem:

$$2(1-i)s = 2(1-i)(1-nn)t, \text{ ſiue}$$

$$2(1-i)(s-(1-nn)t) = 0$$

vnde prior factor manifeſto dat $i = 1$, id quod rei natura poſtulat; ſi enim latitudo ellipſis euaneſcat, hoc eſt ſi $b = 0$, tum etiam latitudo rectanguli debet euaneſcere. Cum igitur euoluerimus tam caſus, quibus litterae i et n ſunt quam minimae, quam eum, vbi maximum ſortiuntur valorem $= 1$, pro reliquis caſibus iudicium haud erit difficile. Cum enim pro exiguis valoribus habeamus $n = \frac{4}{7}i$, pro maximo autem $n = i$; in genere non multum a veritate aberrabimus, ſi ſtatuamus

$n =$

$$n = \frac{\frac{4}{7}i}{1 - \frac{3}{7}ii} = \frac{4i}{7 - 3.ii}.$$

Quamdiu enim i eſt fractio valde parua, erit $n = \frac{4}{7}i$; et ſi aliquanto maius fuerit, erit $n = \frac{4}{7}i + \frac{12}{49}i^3$, qui valor illo $n = \frac{4}{7}i + \frac{306}{2401}i^3$ aliquantillum maior eſt; verum vbi fit $i = 1$, iterum prodit $n = 1$.

Corollarium.

§. 8. Quo naturam huius ſolutionis penitius perſpiciamus, ponamus in genere:

$$1 - \alpha n^2 - \alpha\beta n^4 - \alpha\beta\gamma n^6 \ldots\ldots = s,$$

$$2\alpha n^2 + 4\alpha\beta n^4 + 6\alpha\beta\gamma n^6 \ldots\ldots = t$$

vt noſtra aequatio fiat

$$(2n^2 - in - in^3)s = 2(1 - in - n^2 + in^3)t,$$

vnde ſequitur

$$i = \frac{2n^2 s - 2(1 - n^2)t}{n(1 + n^2)s - 2n(1 - n^2)t},$$

vnde caſu $n = 1$ manifeſto fit $i = 1$. Pro alio vero caſu quocunque pro n aſſumto, quia ambas ſeries s et t ſatis expedite ſummare licet, verus valor ipſius i ſatis exacte definiri poterit.

Corollarium 2.

§. 9. Ambae ſeries, quae in noſtram ſolutionem ingrediuntur, manifeſto ita a ſe inuicem pendent, vt ſit $t = -\frac{n\,ds}{dn}$. Nunc autem ſtatuamus $t = sz$, vt fiat

$$i = \frac{2n^2 - 2(1 - n^2)z}{n(1 + n^2) - 2n(1 - n^2)z},$$

ita vt hic vnicum valorem z quaeri oporteat, id quod ſe-

ſequenti modo fieri poterit. Cum ſit $t = -\frac{nds}{dn}$, erit nunc $sz = -\frac{nds}{dn}$, hincque $\frac{ds}{s} = -\frac{zdn}{n}$, et differentiando

$$\frac{dds}{s} - \frac{ds^2}{s^2} = +\frac{zdn^2}{n^2} - \frac{dz.dn}{n}.$$ Addatur

$$\frac{ds^2}{s^2} = \frac{z^2dn^2}{n^2},$$ fietque

$$\frac{dds}{s} = \frac{zdn^2}{n^2} + \frac{z^2dn^2}{n^2} - \frac{dzdn}{n}.$$

Supra autem dedimus hanc inter s et n aequationem:

$$\frac{4n.dds}{dn^2} + \frac{4nds}{dn} + \frac{ns}{1-nn} = 0,$$

quae per s diuiſa praebet

$$\frac{4n}{dn^2}.\frac{dds}{s} + \frac{4}{dn}.\frac{ds}{s} + \frac{n}{1-nn} = 0;$$

hic autem valores modo inuenti ſubſtituti producunt

$$\frac{4.z}{n} + \frac{4.z^2}{n} - \frac{4dz}{dn} - \frac{4z}{n} + \frac{n}{1-nn} = 0,$$ vnde fit

$$dz = \frac{ndn}{4(1-nn)} + \frac{z^2dn}{n},$$

quae eſt aequatio differentialis tantum primi gradus, ſimilis formae, qua olim aequatio Riccatiana referri eſt ſolita. Semper autem reſolutionem ita inſtitui decet, vt littera n tanquam cognita ſpectetur, et pro ea debitus valor ipſius z eruatur; tum vero inde valor litterae i determinetur. Sic enim viciſſim affirmare poterimus, huic ipſi valori ipſius i aſſumtum valorem litterae n conuenire; quo inuento, cum ſit $c^2 = \frac{2b^2(1-in)}{1-nn}$, etiam innoteſcit quantitates c; at denique ex c et n ipſi ſemiaxes a et b definiuntur.

Corollarium 3.

§. 10. Quo omnes iſti calculi facilius expediri queant, valores coëfficientium α, β, γ, δ, in fractionibus decimalibus exhibeamus, vna cum earum logarithmis:

$l\alpha =$

$l\alpha = 8,7958800;$	$\alpha = 0,0625000.$
$l\alpha\beta = 8.1657913;$	$\alpha\beta = 0.0146484.$
$l\alpha\beta\gamma = 7,8067693;$	$\alpha\beta\gamma = 0,0064087.$
$l\alpha\beta\gamma\delta = 7,5538653;$	$\alpha\beta\gamma\delta = 0,0035799.$
$l\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon = 7,3583455;$	$\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon = 0,0022821.$
$l\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon\zeta = 7,1988959;$	$\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon\zeta = 0,0015808.$

Exemplum.

§. 11. Euoluamus caſum, quo ſemiaxes ellipſis a et b ſunt in ratione dupla, ſiue $a : b = 2 : 1$, vnde fit

$$n = \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} = \frac{3}{5}, \text{ hinc } n^2 = \frac{9}{25},$$

vnde valores ſingulorum terminorum ita ſe habebunt pro vtraque ſerie s et t:

$\alpha n^2 = 0,0225000$	$2\alpha n^2 = 0,0450000$
$\alpha\beta n^4 = 0,0018984$	$4\alpha\beta n^4 = 0,0073934$
$\alpha\beta\gamma n^6 = 0,0002990$	$6\alpha\beta\gamma n^6 = 0,0017940$
$\alpha\beta\gamma\delta n^8 = 0\ 0000601$	$8\alpha\beta\gamma\delta n^8 = 0,0004808$
$\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon n^{10} = 0,0000138$	$10\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon n^{10} = 0,0001380$
$\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon\zeta n^{12} = 0,0000034$	$12\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon\zeta n^{12} = 0,0000408$
- - - - 10	- - - - 215
0,0247757	$t = 0,0550685$
ergo $s = 0,9752242$	

Hinc reperitur $\log. z = 8.7517967$. Cum nunc ſit

$$n i = \frac{3}{5} i = \frac{2n^2 - 2(1 - n^2)z}{1 + n^2 - 2(1 - n^2)z} = \frac{18 - 32.z}{34 - 32.z},$$

reperiemus

$$\frac{3}{5} i = 0,50300, \text{ hincque } i = 0,838333.$$

Hinc ergo viciſſim, ſi pro dato rectangulo fuerit

$$i = \frac{f^2 - g^2}{f^2 + g^2} = 0,838333,$$

tum

tum pro ellipsi satisfaciente erit

$$n = \frac{3}{5}, \quad \text{siue } a:b = 2:1.$$

Problema 3.

§. 12. Si data fuerit species rectanguli, cui ellipsin minimae perimetri circumscribi oporteat, eius speciem per aequationem finitam definire.

Solutio.

Cum species rectanguli contineatur ratione inter eius latera, littera nostra i eius speciem declarat, cum sit $i = \frac{f^2 - g^2}{f^2 + g^2}$; deinde quia species ellipsis ratione inter eius axes indicatur, ea in nostra littera n comprehendetur, cum sit $n = \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}$. Requiritur ergo aequatio finitis terminis expressa, quae relationem inter has quantitates i et n exhibeat. Nunc autem vidimus esse

$$i\,n = \frac{2n^2 - 2(1 - n^2)z}{1 + n^2 - 2(1 - n^2)z},$$

vbi z per hanc aequationem differentialem determinatur:

$$dz = \frac{n\,dn}{4(1 - nn)} + \frac{z^2 . dn}{n}.$$

Nihil aliud igitur superest, nisi vt hinc littera z eliminetur. Quod quo facilius fieri possit, ponamus $2(1 - n^2)z = x$, vt fiat $i\,n = \frac{2n^2 - x}{1 + n^2 - x}$; at ob

$$z = \frac{x}{2(1 - nn)} \text{ erit } dz = \frac{dx}{2(1 - nn)} + \frac{n\,x\,dn}{(1 - nn)^2};$$

vnde orietur

$$2(1 - nn)dx + 4nx\,dn = (1 - nn)n\,dn + \frac{x^2 . dn}{n}.$$

Ex illa autem aequatione, ponendo v loco in, nascitur

$$x = \frac{2n^2 - (1 + n^2)v}{1 - v}, \text{ hincque}$$

$dx =$

$$dx = -\frac{dv(1-nn)}{(1-v)^2} + \frac{4ndn - 2nvdn}{1-v},$$

quo ſubſtituto prodit

$$-\frac{2dv(1-nn)^2}{(1-v)^2} + 8ndn = (1-nn)ndn$$
$$+ \frac{4n^4 - 4n^2(1+n^2)v + (1+n^2)^2v^2}{(1-v)^2} \cdot \frac{dn}{n},$$

et fractionibus ſublatis hinc colligitur

$$-\frac{2dv(1-nn)^2}{dn} = -7n + 3n^3 + 10.nv + \frac{1}{n}v^2$$
$$- 2n^3.v - 5n.v^2.$$

Nunc denique loco v ſuum valorem in ſubſtituamus, ac prodit

$$-\frac{2n(1-nn)^2.di}{dn} = -7.n + 3n^3$$
$$+ 2i(1+3nn)$$
$$+ i^2.n(1-5.n^2).$$

Quodſi igitur conſtructio huius aequationis concedatur, non ſolum pro ſingulis valoribus ipſius n conuenientes valores pro i, ſed etiam viciſſim pro ſingulis valoribus ipſius i reſpondentes ipſius n elicere licebit. Haecque profecto aequatio multo ſimplicior euaſit, quam initio ſperare licuiſſet. Quodſi eam adeo integrare, vel ſaltem conſtruere liceret, analyſi inſigne incrementum acceſſiſſe foret cenſendum.

SPECVLATIONES
CIRCA QVASDAM INSIGNES PROPRIETATES NVMERORVM.

Auctore

L. EVLERO.

§. 1.

Nullum eſt dubium, quin multitudo omnium fractionum diuerſarum, quae inter terminos 0 et 1 conſtitui poſſunt, ſit infinita; vnde cum multitudo omnium numerorum integrorum etiam ſit infinita, manifeſtum eſt, multitudinem omnium plane fractionum adhuc infinities eſſe maiorem; quandoquidem inter binos numeros, vnitate differentes, innumerabiles fractiones diuerſae admitti debent. Hic autem aſſumitur, denominatores fractionum in infinitum augeri poſſe: at ſi terminus praeſcribatur, quem numeratores ſuperare non debeant, tum vtique numerus fractionum, quas inter terminos 0 et 1 conſtituere licet, erit determinatus. Quantus autem iſte numerus ſit futurus, pro quouis limite, qui denominatoribus praeſcribitur, quaeſtio quidem primo intuitu non ita difficilis videtur; verum ſi rem attentius conſideremus, tantae difficultates occurrunt, vt perfecta iſtius quaeſtionis ſolutio vix adhuc ſperari poſſe videatur.

§. 2.

§. 2. Quoniam enim fractiones, de quibus hic quaeritur, omnes inter se diuersae esse debent, ex quolibet denominatore aliae fractiones formari nequeunt, nisi quarum numeratores non solum sint denominatore minores, sed etiam ad eundem primi, quia alioquin ad formam simpliciorem, ideoque ad denominatores minores reduci possent. Ita cum factio $\frac{15}{24}$ reducatur ad $\frac{5}{8}$, ista fractio pro denominatore $= 24$ non amplius numerari poterit, quoniam pro denominatore 8 iam est numerata. Totum igitur negotium huc redit, vt pro quolibet denominatore, qui sit $= D$, multitudo numerorum ipso minorum, et qui cum eo nullum habeant diuisorem communem, assignetur, quippe qui soli pro numeratoribus accipi possunt. Ita pro denominatore 24 alii numeratores admitti nequeunt, praeter 1, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, quorum multitudo est tantum 8, cuius ratio in compositione numeri 24 est sita. Si enim denominator D esset numerus primus, tum vtique omnes numeri ipso minores, quorum multitudo est $D - 1$, idoneos praeberent numeratores. Quo plures autem denominator D habuerit diuisores, eo magis multitudo numeratorum restringitur.

§. 3. Hinc igitur ista quaestio nascitur: vt, proposito quocunque numero D, multitudo numerorum ipso minorum, ad eumque simul primorum, assignetur. Quod quo facilius praestari possit, denotet character πD multitudinem istam numerorum ipso D minorum, et qui cum eo nullum habeant diuisorem communem. Ac primo quidem manifestum est, si fuerit D numerus primus, fore $\pi D = D - 1$. Ante autem quam numeros compositos e-

xaminemus, valores huius characteris πD pro omnibus numeris centenario non maioribus apponamus:

$\pi\,1 = 0$	$\pi\,21 = 12$	$\pi\,41 = 40$	$\pi\,61 = 60$	$\pi\,81 = 54$
$\pi\,2 = 1$	$\pi\,22 = 10$	$\pi\,42 = 12$	$\pi\,62 = 30$	$\pi\,82 = 40$
$\pi\,3 = 2$	$\pi\,23 = 22$	$\pi\,43 = 42$	$\pi\,63 = 36$	$\pi\,83 = 82$
$\pi\,4 = 2$	$\pi\,24 = 8$	$\pi\,44 = 20$	$\pi\,64 = 32$	$\pi\,84 = 24$
$\pi\,5 = 4$	$\pi\,25 = 20$	$\pi\,45 = 24$	$\pi\,65 = 48$	$\pi\,85 = 64$
$\pi\,6 = 2$	$\pi\,26 = 12$	$\pi\,46 = 22$	$\pi\,66 = 20$	$\pi\,86 = 42$
$\pi\,7 = 6$	$\pi\,27 = 18$	$\pi\,47 = 46$	$\pi\,67 = 66$	$\pi\,87 = 56$
$\pi\,8 = 4$	$\pi\,28 = 12$	$\pi\,48 = 16$	$\pi\,68 = 32$	$\pi\,88 = 40$
$\pi\,9 = 6$	$\pi\,29 = 28$	$\pi\,49 = 42$	$\pi\,69 = 44$	$\pi\,89 = 88$
$\pi\,10 = 4$	$\pi\,30 = 8$	$\pi\,50 = 20$	$\pi\,70 = 24$	$\pi\,90 = 24$
$\pi\,11 = 10$	$\pi\,31 = 30$	$\pi\,51 = 32$	$\pi\,71 = 70$	$\pi\,91 = 72$
$\pi\,12 = 4$	$\pi\,32 = 16$	$\pi\,52 = 24$	$\pi\,72 = 24$	$\pi\,92 = 44$
$\pi\,13 = 12$	$\pi\,33 = 20$	$\pi\,53 = 52$	$\pi\,73 = 72$	$\pi\,93 = 60$
$\pi\,14 = 6$	$\pi\,34 = 16$	$\pi\,54 = 18$	$\pi\,74 = 36$	$\pi\,94 = 46$
$\pi\,15 = 8$	$\pi\,35 = 24$	$\pi\,55 = 40$	$\pi\,75 = 40$	$\pi\,95 = 72$
$\pi\,16 = 8$	$\pi\,36 = 12$	$\pi\,56 = 24$	$\pi\,76 = 36$	$\pi\,96 = 32$
$\pi\,17 = 16$	$\pi\,37 = 36$	$\pi\,57 = 36$	$\pi\,77 = 60$	$\pi\,97 = 96$
$\pi\,18 = 6$	$\pi\,38 = 18$	$\pi\,58 = 28$	$\pi\,78 = 24$	$\pi\,98 = 42$
$\pi\,19 = 18$	$\pi\,39 = 24$	$\pi\,59 = 58$	$\pi\,79 = 78$	$\pi\,99 = 60$
$\pi\,20 = 8$	$\pi\,40 = 16$	$\pi\,60 = 16$	$\pi\,80 = 32$	$\pi\,100 = 40$

§. 4 Ex hac igitur tabula patet, denominatorem 2 vnicam praebere fractionem, scilicet $\frac{1}{2}$ inter 0 et 1; denominatorem vero 3 dare 2; at 4 dare has duas fractiones: $\frac{1}{4}$ et $\frac{3}{4}$; et ita porro. Vnde si denominatores non vltra 10 continuare velimus, numerus omnium fractionum erit 31; sin autem continuemus vsque ad 20, numerus est 127; vsque

vsque ad 30 progrediendo ſumma fractionum prodit 277, vti ſequens tabella declarat.

Max. denom.	Num. fract.
10	31
20	127
30	277
40	489
50	773
60	1101
70	1493
80	1975
90	2489
100	3043

§. 5. Quod ſi omnes plane fractiones admittere vellemus, pro denominatore maximo $= 10$ numerus omnium fractionum foret $1 + 2 + 3 + 4 \ldots + 9 = 45$. Hinc igitur excludi debent eae, quae reductionem admittunt. Primo igitur excludendae erunt fractiones $\frac{2}{4}, \frac{3}{6}, \frac{4}{8}, \frac{5}{10}$, quippe $= \frac{1}{2}$; tum vero iſtae: $\frac{2}{6}$ et $\frac{3}{9}$, quippe $= \frac{1}{3}$; itemque $\frac{4}{6}$ et $\frac{6}{9}$ vtpote $= \frac{2}{3}$; praeterea $\frac{2}{8}$ et $\frac{6}{8}$; ac denique $\frac{2}{10}, \frac{4}{10}, \frac{6}{10}, \frac{8}{10}$, quarum omnium numerus eſt 14, qui a 45 ſubtractus rerelinquit 31. Pro maioribus autem denominatoribus, quos admittere voluerimus, haec enumeratio nimis fiet prolixa, quae quomodo nihilo minus inſtitui poſſit, videamus.

§. 6. Sit igitur D maximus denominator, quem admittimus, ac numerus omnium plane fractionum foret

$$= 1 + 2 + 3 + 4 + \text{- - - -} + (D - 1) = \frac{DD - D}{2}.$$

 Hinc

Hinc iam excludi debent omnes fractiones, quarum valor eſt $\frac{1}{2}$, praeter ipſum $\frac{1}{2}$. Hunc in finem diuidatur D per 2, et quotus, ſiue verus, ſiue proxime minor ſit $= \alpha$, ac manifeſtum eſt, numerum fractionum excludendarum fore $= \alpha - 1$. Deinde pro fractionibus $\frac{1}{3}$ et $\frac{2}{3}$ ſit $\frac{D}{3} = \beta$, denotante β vel verum, vel vero proxime minorem, eritque numerus fractionum excludendarum $= 2(\beta - 1) = (\beta - 1)\pi : 3$. Simili modo ſi ponamus $\frac{D}{4} = \gamma$; tum vero porro $\frac{D}{5} = \delta$, $\frac{D}{6} = \varepsilon$, etc., quamdiu ſcilicet iſti quoti prodeunt vnitate maiores, numeri fractionum hinc excludendarum erunt

$$(\gamma - 1)\pi : 4, \; (\delta - 1)\pi : 5, \; (\varepsilon - 1)\pi : 6 \text{ etc.}$$

quibus igitur ablatis remanebit multitudo fractionum quaeſita:

$$\frac{DD - D}{2} - (\alpha - 1)\pi 2 - (\beta - 1)\pi 3 - (\gamma - 1)\pi 4 - (\delta - 1)\pi 5 - \text{etc.}$$

Ita ſi fuerit $D = 20$, habebimus

$$\tfrac{20}{2} = \alpha = 10, \; \tfrac{20}{3} = \beta = 6, \; \tfrac{20}{4} = \gamma = 5, \; \tfrac{20}{5} = \delta = 4,$$
$$\tfrac{20}{6} = \varepsilon = 3, \; \tfrac{20}{7} = \zeta = 2, \; \tfrac{20}{8} = \eta = 2,$$
$$\tfrac{20}{9} = \theta = 2, \; \tfrac{20}{10} = \iota = 2.$$

Hinc igitur, ob $\frac{DD - D}{2} = 190$, multitudo fractionum diverſarum erit

$$190 - 9.1 - 5.2 - 4.2 - 3.4 - 2.2 - 1.6 - 1.4 - 1.6 - 1.4$$
$$= 190 - 63 = 127$$

vti ſupra inuenimus.

§. 7. Totius igitur huius inueſtigationis cardo in eo verſatur, quomodo, propoſito quocunque numero D, inveniri debeat valor characteris πD. Ac primo quidem iam ſupra annotauimus, ſi fuerit D numerus primus, tum fore

fore $\pi D = D - 1$. Verum ſi D fuerit numerus compoſitus, determinatio characteris πD non parum ardua deprehenditur; pendebit enim a factoribus, ex quibus numerus D componitur.

§. 8. Denotet igitur p numerum primum quemcunque, vt ſit $\pi p = p - 1$, et quaeramus valorem πp^2; vbi quidem ſtatim patet, non omnes numeros ipſo minores, quorum multitudo eſt $pp - 1$, ad eum eſſe primos, ſed inde excludi debere illos, qui per p ſunt diuiſibiles, qui ſunt: p, $2p$, $3p$, $4p$, etc. . . . $(p-1)p$. Horum autem multitudo eſt $p - 1$, qui ergo numerus a $pp-1$ ſubtractus relinquit $p(p-1)$ ita vt ſit $\pi pp = (p-1)p$. Simili modo, ſi fuerit $D = p^3$, multitudo numerorum ipſo minorum eſt $p^3 - 1$, vnde excludi debent ii, qui per p, ſunt diuiſibiles, qui ſunt

$$p, 2p, 3p, 4p, \text{etc.} \ldots p(pp-1),$$

quorum multitudo cum ſit $pp - 1$, erit

$$\pi p^3 = p^3 - 1 - (pp-1) = p^3 - pp = (p-1)pp.$$

Ex quo iam facile perſpicitur, pro poteſtate quacunque in genere fore $\pi p^n = (p-1)p^{n-1}$.

§. 9. Sit nunc q alius numerus primus a p diverſus, et quaeramus valorem πpq. Primo igitur multitudo numerorum ipſo pq minorum eſt $pq - 1$, vnde ergo excludi debent omnes illi, qui ſunt diuiſibiles tam per p quam per q. Iam vero multipla ipſius p erunt

$$p, 2p, 3p, 4p, \ldots\ldots p(q-1)$$

quorum multitudo eſt $q - 1$. Eodem modo multitudo

multi-

multiplorum ipſius q erit $p-1$, quae cum omnia a prioribus ſint diuerſa, multitudo numerorum excludendorum erit $p+q-2$, ita vt hinc prodeat

$$\pi pq = pq-1-(p+q-2) = pq-p-q-1 = (p-1)(q-1),$$

vnde hoc egregium nacti ſumus Theorema: Si fuerint p et q numeri primi diuerſi, ſemper erit

$$\pi : pq = (p-1)(q-1).$$

Eodem autem modo oſtendi poterit, ſi praeterea r et s ſint numeri primi ab illis diuerſi, fore

$$\pi pqr = (p-1)(q-1)(r-1) \text{ et}$$
$$\pi pqrs = (p-1)(q-1)(r-1)(s-1).$$

§. 10. Inueſtigemus nunc valorem huius formulae: πppq, vbi omnium numerorum ppq minorum multitudo eſt $ppq-1$, vnde ergo primo excludi debent omnia multipla ipſius p, quorum multitudo eſt $pq-1$; tum vero numerorum per q diuiſibilium multitudo eſt $pp-1$, inter quos autem occurrunt numeri

$$pq, \; 2pq, \; 3pq, \text{ etc. } \ldots \; pq(p-1),$$

qui inſuper per p ſunt diuiſibiles, quos, quia iam excluſimus, ex hoc poſtremo ordine tolli oportet, ita vt hic tantum remaneant $pp-1-(p-1) = pp-p$, quamobrem hinc obtinebimus

$$\pi ppq = ppq-1-(pq-1)-(pp-p) = (p-1)(q-1)p.$$

Quare cum ſit

$$p(p-1) = \pi pp \text{ et } q-1 = \pi : q,$$

hinc naſcitur iſtud theorema: Si p et q fuerint numeri primi diuerſi, tum erit

$$\pi ppq = \pi pp \cdot \pi q = p(p-1)(q-1).$$

§. 11.

§. 11. Simili modo haud difficulter intelligetur fore

$$\pi p^n q = \pi p^n \pi q = p^{n-1}(p-1)(q-1).$$

Nam quia multitudo numerorum minorum est $p^n q - 1$, hinc primo excludantur omnia multipla ipsius q, quorum numerus est $p^n - 1$, et remanebit multitudo $p^n q - p^n$. Praeterea vero etiam excludamus omnes numeros per p diuisibiles, quorum multitudo est $p^{n-1} q - 1$, et remanet $p^n q - p^n - p^{n-1} q + 1$. Huc autem insuper addi debent omnes termini per $p q$ diuisibiles, quorum multitudo est $p^{n-1} - 1$, vnde colligitur

$$\pi p^n q = p^n q - p^n - p^{n-1} q + p^{n-1}$$
$$= p^{n-1}(p q - p - q + 1) = p^{n-1}(p-1)(q-1).$$

§. 12. Haud dissimili modo, si numerus D fuerit productum ex duabus potestatibus quibuscunque numerorum primorum p et q diuersorum, ita vt sit $D = p^\alpha q^\beta$, tum erit

$$\pi p^\alpha q^\beta = p^{\alpha-1} q^{\beta-1}(p-1)(q-1);$$

hincque generaliter, si litterae p, q, r, s denotent numeros primos inter se diuersos, erit

$$\pi p^\alpha q^\beta r^\gamma s^\delta = p^{\alpha-1} q^{\beta-1} r^{\gamma-1} s^{\delta-1}(p-1)(q-1)(r-1)(s-1)$$

ex quo intelligitur, fore quoque

$$\pi p^\alpha q^\beta r^\gamma s^\delta = \pi p^\alpha . \pi q^\beta . \pi r^\gamma . \pi s^\delta .$$

Quamobrem, si modo valores characteris π D inuenti fuerint pro omnibus potestatibus numerorum primorum, tum ex iis omnium plane numerorum valores characteris π expedite assignari posse manifestum est.

§. 13. Si quis autem ope horum Theorematum pro numeris quantumuis magnis iſtos valores inueſtigare voluerit, promtiſſime ſcopum obtinebit, ſi numerum propoſitum D in factores inter ſe primos reſoluat, ſiue ii ſint numeri primi, nec ne. Namque ſi fuerit $D = PQRS$ etc. atque hi factores P, Q R, S nullos habeant diuiſores communes, tum ſemper erit

$$\pi PQRS = \pi P . \pi Q . \pi R . \pi S.$$

Veluti ſi proponatur iſte numerus: $D = 360$, ob $360 = 9.40$ erit $\pi 360 = \pi 9 . \pi 40 = 6 . 16 = 96$.

§. 14. Quod ſi vero progreſſionem iſtorum numerorum, qui in tabula ſupra data exhibentur, contemplemur, quae eſt 0, 1, 2, 2, 4, 2, 6, 4, 6 4, 10, 4, etc. nullum plane ordinem in eius terminis obſeruare licet; cum tamen in progreſſione numerorum, cuius ſinguli termini exhibent ſummas diuiſorum numerorum naturalium, inſignem ordinem mihi detegere contigerit. Multo minus ergo, ſi ex illis numeris talis ſeries formetur:

$$1 . x^2 + 2 x^3 + 2 x^4 + 4 x^5 + 2 x^{10} + \text{etc.}$$

cuius terminus generalis noſtro ſignandi modo eſt $x^n \pi n$, eius indoles, vel adeo ſumma, vllo modo per quantitates cognitas, ſiue algebraicas ſiue transcendentes, exprimi poſſe videtur. Quocirca vtique maxime operae pretium foret, in naturam huius progreſſionis inquirere, quandoquidem hinc ſcientia numerorum haud contemnendis incrementis locupletari poſſet.

§. 15. Ex formula autem generali §. 12. data multo facilior regula deduci poteſt, cuius ope pro quocun-

que

que numero proposito N valor characteris πN assignari potest, quam in sequente Problemate exponamus.

Problema.

Proposito numero quocunque N inuenire multitudinem omnium numerorum ipso minorum ad eumque primorum.

Solutio.

§. 16. Quicunque fuerit numerus N, semper tali forma repraesentari potest, vt sit $N = p^\alpha q^\beta r^\gamma s^\delta$ etc. existentibus p, q, r, s numeris primis. Inuenimus autem tum fore

$$\pi N = p^{\alpha-1} q^{\beta-1} r^{\gamma-1} s^{\delta-1} (p-1)(q-1)(r-1)(s-1).$$

Hinc igitur erit

$$\frac{\pi N}{N} = \frac{(p-1)(q-1)(r-1)(s-1)}{pqrs},$$

vnde sequitur fore

$$\pi N = \frac{N(p-1)(q-1)(r-1)(s-1)}{pqrs};$$

ita vt iam non amplius opus sit exponentes $\alpha\, \beta\, \gamma$ nosse, sed sufficit omnes numeros primos p, q, r, s diuersos indagasse, per quos numerus propositus N est diuisibilis; quibus cognitis multitudo numerorum, minorum quam N et qui simul ad eum sunt primi, erit

$$\pi N = \frac{N(p-1)(q-1)(r-1)(s-1)}{pqrs}.$$

§. 17. Ita si v. gr. propositus fuerit iste numerus: $N = 9450$, numeri primi, per quos hunc numerum diuidere licet, sunt 2, 3, 5, 7, quandoquidem per nullos alios diuisionem admittit; hinc igitur erit

$$\pi\, 9450 = \frac{9450.\, 1.\, 2.\, 4.\, 6}{2.\, 3.\, 5.\, 7} = 2160.$$

§. 18. Quod ſi ergo N vnicum habeat diuiſorem primum p, id quod euenit, quando N vel ipſi p aequatur, vel cuipiam eius poteſtati; tum igitur ſemper erit $\pi N = \frac{N(p-1)}{p}$. Scilicet ſi fuerit $N = p$, erit $\pi N = p - 1$; at ſi fuerit $N = p^n$, tum erit $\pi N = p^{n-1}(p-1)$, vti ſupra inuenimus. Sin autem N duos tantum admittat diuiſores primos p et q, tum erit $\pi N = \frac{N(p-1)(q-1)}{pq}$. Ita ſi N alios non habeat diuiſores, praeter 2 et 3, erit $\pi N = \frac{N}{3}$. Tales autem numeri vsque ad centum ſunt

6, 12, 18, 24, 36, 48, 54, 72, 96.

§. 19. Haec ipſa autem regula facilis nos manuducit ad aliam demonſtrationem multo ſimpliciorem. Ponamus enim numerum N diuiſores primos inter ſe diverſos habere p, q et r, ac praeterea nullos alios; et quoniam multitudo omnium numerorum ipſo non maiorum eſt $= N$, qui ergo numerus vtique diuiſibilis erit per p, q et r, inde primo excludi debent omnes, qui per p ſunt diuiſibiles, quorum multitudo cum ſit $\frac{N}{p}$, his deletis reliquorum multitudo erit $N - \frac{N}{p} = \frac{N(p-1)}{p}$; vnde iam excludamus omnes, qui ſunt per q diuiſibiles, quorum multitudo cum ſit $\frac{N(p-1)}{pq}$, remanebunt adhuc $\frac{N(p-1)(q-1)}{pq}$. Hinc igitur inſuper excludi debent ii, qui ſunt per r diuiſibiles, quorum multitudo cum ſit pars $\frac{1}{r}$ iſtius numeri, iis deletis numerus reliquorum erit $\frac{N(p-1)(q-1)(r-1)}{pqr}$; hocque modo ſolide demonſtrata eſt noſtra regula.

§. 20. Interim tamen etiam haec regula nullum ſubſidium nobis ſuppeditat, ad naturam progreſſionis, quam numeri πN conſtituunt, et quae eſt:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
0	1	2	2	4	2	6	4	6	4	10	4

explorandam. Verum ſi poteſtates quantitatis indefinitae x adiungamus, ac ſtatuamus

$$s = 1x^2 + 2x^3 + 2x^4 + 4x^5 + 2x^6 + 6x^7 + 4x^8 + 6x^9 + 4x^{10} + \text{etc.}$$

ex hac ſerie ſequentem formare poſſumus:

$$\frac{\int s\,dx}{x} = \frac{xx}{2} + \frac{2x^3}{3} + \frac{x^4}{2} + \frac{4x^5}{5} + \frac{x^6}{3} + \frac{6x^7}{7} + \frac{x^8}{2} + \frac{2x^9}{3} + \frac{2x^{10}}{5} + \text{etc.}$$

vbi omnes coefficientes in formula $\frac{(p-1)(q-1)(r-1)}{pqr}$ continentur.

§. 21. Omnes enim eae poteſtates ipſius x eundem habebunt coefficientem $\frac{1}{2}$, quarum exponentes ſolum diuiſorem primum admittunt, ideoque ſunt poteſtates binarii, ſcilicet

$$x^2,\ x^4,\ x^8,\ x^{16},\ x^{32},\ x^{64},\ \text{etc.}$$

Deinde omnes poteſtates, quarum exponentes ſunt dignitates ternarii, quae ſunt x^3, x^9, x^{27}, omnes habent eundem coefficientem $\frac{2}{3}$. Simili modo $\frac{4}{5}$ erit communis coefficiens poteſtatum x^5, x^{25}, x^{125}, etc. At vero $\frac{1}{3} = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}$ communis erit coefficiens omnium poteſtatum, quarum exponentes tantum hos duos numeros primos 2 et 3 inuoluunt, quae ſunt x^6, x^{12}, x^{18}, x^{24}, x^{36}, etc. Eodemque modo res ſe habet de reliquis exponentibus, qui vel binos tantum, vel ternos, vel quaternos numeros primos inuoluunt. Quo plures autem numeri primi in exponentibus occurrunt, eo copioſiores erunt ſeries poteſtatum, quae communi gaudent coefficiente.

§. 22. Cum igitur in his ordinibus ſeries ſimpliciſſimae ſint eae, quarum exponentes progreſſionem geometricam conſtituunt, cuiusmodi eſt $x + x^2 + x^4 + x^8 + x^{16} +$ etc. quoniam huius ſeriei nullo adhuc modo ſumma definiri, vel ſaltem ad formulam quampiam integralem reduci potuit, multo minus ſperare licet, vnquam certum ordinem in hac ſerie generali detectum iri, vnde ſaltem ſequentes termini per praecedentes determinari queant; quod merito eo magis mirum videbitur, quod cuiusque poteſtatis x^n coefficiens tam facile aſſignari poteſt.

DE PLVRIMIS QVANTITATIBVS TRANSCENDENTIBVS, QVAS NVLLO MODO PER FORMVLAS INTEGRALES EXPRIMERE LICET.

Auctore

L. EVLERO.

§. 1.

Formulae integrales, quarum integrationem per quantitates algebraicas expedire non licet, vulgo tanquam vnicus fons omnium quantitatum transcendentium ſpectari ſolent. Ita enim ex formula integrali $\int\frac{dx}{x}$ nati ſunt logarithmi, et ex formula $\int\frac{dx}{1+xx}$ arcus circulares; quae quantitates, etiamſi transcendentes, nunc quidem in Analyſin ita ſunt receptae, vt aeque facile tractari queant ac ipſae quantitates algebraicae. Praeterea vero etiam quantitates, quae rectificationem ſectionum conicarum inuoluunt, a Geometris iam ita ſunt exploratae, vt problemata, quae ad eas fuerint perducta, pro perfecte ſolutis haberi ſoleant. Continentur autem iſtae quantitates transcendentes in huiusmodi formulis integralibus: $\int dx\sqrt{\frac{f+gxx}{h+kxx}}$, et quotiescun-

que

que aliae quantitates transcendentes occurrunt, eae ſemper per quadraturas certarum linearum curuarum repraeſentari poſſe cenſentur; quo pacto etiam ad formulas integrales reducuntur, quae, vtcunque fuerint complicatae, tamen veros valores talium quantitatum transcendentium exprimere aeſtimantur.

§. 2. Interim tamen obſeruaui, innumerabilia exhiberi poſſe quantitatum transcendentium genera, quae nullo modo per formulas integrales exprimi queant, etiamſi earum valores proxime veros plerumque ſatis facile definire liceat. Oriuntur autem huiusmodi quantitates potiſſimum ex talibus ſeriebus infinitis, quarum ſummae nullo adhuc modo ad formulas integrales reuocari potuerunt, inter quas imprimis notatu digna occurrit iſta ſeries infinita a geometrica parum diſcrepans:

$$1 + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{7} + \tfrac{1}{15} + \tfrac{1}{31} + \tfrac{1}{63} + \text{etc.}$$

quarum fractionum denominatores vnitate deficiunt a poteſtatibus binarii, cuius ſumma vero proxime haud difficulter aſſignatur. Facile autem intelligitur, eam neque eſſe rationalem, neque ad numeros irrationales referri poſſe; tum vero etiam ſatis certum videtur, eam neque per logarithmos, neque per arcus circulares exprimi poſſe. Interim tamen nulla adhuc via patet, eiusmodi formulam integralem inueſtigandi, cuius valor ſummam iſtius ſeriei exacte exhiberet. Quod ſi huius ſeriei ſinguli termini more ſolito in ſeries geometricas conuertantur, notatu dignum eſt, quod eius ſumma per ſequentes formulas repraeſentari poſſit:

$$\frac{1}{2^{xx}} + 2\int\frac{1}{2^{xx+x}} + 2\int\frac{1}{2^{xx+2x}} + 2\int\frac{1}{2^{xx+3x}} + \text{etc.}$$

vbi

vbi $\int \frac{1}{2^{xx}}$ denotat ſummam ſeriei infinitae, cuius terminus indici x reſpondens eſt $\frac{1}{2^{xx}}$, quae ergo erit

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^9} + \frac{1}{2^{16}} + \frac{1}{2^{25}} + \text{etc.}$$

huius autem ſeriei ſumma pariter nullo modo exhiberi poteſt, quod idem de reliquis partibus eſt intelligendum. Ipſius autem ſeriei propoſitae ſumma proxime vera eſt 1,606695150, qui numerus ſi cuipiam quantitati cognitae, veluti logarithmo ſeu arcui circulari deprehenderetur aequalis, id ſine dubio eximium eſſet inuentum.

§. 3. Quemadmodum hic a poteſtatibus binarii vnitatem ſubtraximus, ita ad eas numerum indefinitum x addamus, ſtatuamusque

$$y = \frac{1}{1+x} + \frac{1}{2+x} + \frac{1}{4+x} + \frac{1}{8+x} + \text{etc.}$$

qua aequatione, ſi x ſumatur pro abſciſſa, y autem pro applicata, certa linea curua exprimitur, in qua vnicam applicatam, abſciſſae $x = 0$ reſpondentem, reuera aſſignare licet, quippe quae erit $y = 2$. Pro omnibus autem reliquis abſciſſis applicatae erunt quantitates maxime tranſcendentes, quae nullis adeo formulis integralibus exprimi poſſe videntur; ita vt natura huius curuae nulla aequatione ſiue differentiali ſiue integrali repraeſentari queat. Interim tamen euidens eſt, abſciſſis $x = -1$, $x = -2$, $x = -4$, $x = -8$, $x = -16$, etc., applicatas conuenire infinite magnas; ſumto autem $x = \infty$ applicatas eſſe euanituras.

§. 4. Hac aequatio generalior reddi poteſt, ſi loco 2 aſſumatur alius quicunque numerus a, ita vt ſit

 $y =$

$$y = \frac{1}{1+x} + \frac{1}{a+x} + \frac{1}{a^2+x} + \frac{1}{a^3+x} + \frac{1}{a^4+x} + \text{etc.}$$

vbi abſciſſae $x = 0$ reſpondet applicata $y = \frac{a}{a-1}$, reliquae vero omnes iterum erunt maxime tranſcendentes. Euidens autem eſt, ſi ſumeretur $a = 1$, omnes applicatas futuras eſſe infinitas, niſi forte abſciſſa x capiatur infinita. Quemadmodum hic omnibus fractionibus dedimus ſignum $+$, ita quoque alternari poterunt, vt ſit

$$y = \frac{1}{1+x} - \frac{1}{a+x} + \frac{1}{a^2+x} - \frac{1}{a^3+x} + \frac{1}{a^4+x} - \text{etc.}$$

tum autem abſciſſae $x = 0$ reſpondebit applicata $y = \frac{a}{a+1}$. Quin etiam loco x in ſequentibus terminis eius poteſtates ſcribi poterunt, vt habeatur huiusmodi aequatio:

$$y = \frac{1}{1+1} + \frac{1}{a+x} + \frac{1}{a^2+x^2} + \frac{1}{a^3+x^3} + \frac{1}{a^4+x^4} + \text{etc.}$$

quae vtique ita eſt comparata, vt natura huius curuae nulla aequatione finita ſiue differentiali ſiue integrali exprimi poſſe videatur.

§. 5. Praeter iſtas formas vero infinitae aliae, per ſolas poteſtates cuiuspiam quantitatis x procedentes, exhiberi poſſunt, quas pariter nullo modo ad formulas integrales reducere licet. Cum enim nullae adhuc huiusmodi ſeries ſummari potuerint, niſi quarum exponentes in progreſſione geometrica progrediuntur, ſimul atque exponentibus ipſius x aliam quamcunque progreſſionis legem tribuimus, earum ſummatio ſemper vires analyſeos ſuperare videtur, etiamſi formulas integrales quantumuis complicatas in ſubſidium vocare voluerimus. Ita ſi proponatur iſta aequatio infinita:

$$y = 1 + x + x^3 + x^6 + x^{10} + x^{15} + x^{21} + \text{etc.}$$

vbi

vbi exponentes ipſius x ſunt numeri trigonales, pro tali curua nulla prorſus aequatio finita per vllas formulas integrales exhiberi poteſt. Hic quidem ſtatim manifeſtum eſt, ſi fuerit $x = 1$ vel > 1, applicatas in infinitum auctum iri; verum ſi pro x ſumamus valores vnitate minores, ſatis expedite valores applicatae y vero proxime aſſignari poſſunt: veluti ſi ſumatur $x = \frac{1}{10}$, per fractiones decimales ſtatim habetur:

$$y = 1,1010010001000010000010000001$$

quae fractio facillime quousque libuerit continuari poteſt, dum numerus cifrarum inter vnitates collocandarum continuo vnitate creſcit. Quanquam autem huius fractionis verus valor per nullas formulas integrales exhiberi poteſt: tamen eius ſatis exactam nobis formare poſſumus ideam; ita vt, ſi forte quadratura circuli ad talem formam reduci poſſet, ea pro penitus inuenta quaſi eſſet habenda; atque hoc idem tenendum erit de omnibus aliis fractionibus decimalibus, cuius omnes figurae ſecundum certam legem progrediuntur, ita tamen vt nullas reuolutiones periodicas contineat, quibus quippe caſibus valor adeo rationaliter exhiberi poſſet.

§. 6. Maximi autem ſine dubio momenti foret, ſi ſumma huius ſeriei:

$$1 + x + x^3 + x^6 + x^{10} + x^{15} + \text{etc.}$$

finita expreſſione, quantumuis tranſcendente, exhiberi poſſet. Inde enim ſolidiſſima demonſtratio theorematis Fermatiani peti poſſet, quod omnes numeri integri ſint ſummae trium trigonalium; tantum enim opus foret cubum

 illius

illius summae in seriem resoluere, atque ostendere, tum omnes plane potestates ipsius x occurrere debere.

§. 7. Quoniam hic sumsimus $x = \frac{1}{10}$, vt euolutio in fractionem decimalem facillima euaderet, haud multo difficilior erit summatio illius seriei vero proxima, si pro x fractio quaecunque vnitate minor accipiatur. Veluti si sumatur $x = \frac{1}{2}$, vt fiat

$$y = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^6} + \frac{1}{2^{10}} + \frac{1}{2^{15}} + \frac{1}{2^{21}} + \text{etc.}$$

proxime per fractionem decimalem erit

$$y = 1,64163256066.$$

§. 8. Omnes autem istiusmodi series sub hac forma generali complecti licet:

$$y = A x^\alpha + B x^\beta + C x^\gamma + D x^\delta + \text{etc.},$$

dummodo exponentes α, β, γ, δ non in arithmetica ratione progrediantur. Quaecunque enim lex inter coëfficientes A, B, C, etc. statuatur, nunquam valorem ipsius y finito modo exprimi posse certum est, quaecunque etiam quadraturae in subsidium vocentur. Quod si porro huiusmodi formae per alias similis naturae vel multiplicentur vel diuidantur, vel vtcunque combinentur, semper orientur eiusmodi genera quantitatum transcendentium, quae omnes formulas integrales eludere videntur. Neque vero etiam ista noua genera transcendentium comparationem inter se admittunt, vnde immensam multitudinem omnium diuersorum generum quantitatum satis admirari non possumus.

§. 9.

§. 9. Cum enim inter duos numeros quantumuis propinquos non ſolum innumerae fractiones rationales aſſignari queant, ſed etiam infinities plures irrationales, quae omnes non ſolum ab illis, ſed etiam inter ſe ſunt diuerſae, vix credibile videtur, praeterea dari adhuc infinita quantitatum genera, quae tam inter ſe quam ab illis prorſus diſſideant. Et cum iam infinita talia genera exhiberi queant, quae formulis integralibus exhiberi poſſunt, nunc adeo agnoſcere ſumus coacti, etiam praeter illa genera dari adhuc innumera genera quantitatum tranſcendentium, quae nullo modo ad illas ſe reduci patiantur.

DE INDVCTIONE AD PLENAM CERTITVDINEM EVEHENDA.

Auctore

L. EVLERO.

§. 1.

Notum eſt, pleraſque numerorum proprietates primum per ſolam inductionem eſſe obſeruatas, quas deinceps Geometrae ſolidis demonſtrationibus confirmare elaborauerunt; in quo negotio imprimis *Fermatius* ſummo ſtudio et ſatis felici ſucceſſu fuit occupatus. Maxime autem dolendum eſt, plures eius demonſtrationes iniuria temporum penitus interiiſſe, quo imprimis ſunt referendae eae demonſtrationes, quas circa reſolutionem numerorum vel in tres trigonales, vel quatuor quadrata, vel quinque pentagonales, vel ſex hexagonales &c. ſe inueniſſe aſſeueraverat. Deinceps quidem reſolutio in quatuor quadrata a celeberrimo *La Grange* et a me per certiſſima principia fuit euicta, neque tamen adhuc iſta demonſtrandi methodus ad numeros trigonales et reliquos polygonales accommodari potuit. Interim tamen iſtae reſolutiones per ſolam inductionem iam ad tantum certitudinis gradum euectae

euectae ſunt, vt nullis amplius dubiis locus relinqui videatur. Quin etiam ipſa inductio fortaſſe per certas rationes ita corroborari poſſe videtur, vt inſtar abſolutae demonſtrationis ſpectari poſſit, id quod circa reſolutionem numerorum in quatuor quadrata et ternos trigonales oſtendere conabor.

De Reſolutione Numerorum in quatuor quadrata.

§. 2. Quanquam haec reſolutio iam perfecta demonſtratione eſt munita: tamen operae pretium erit, perſcrutari, quousque ſoli inductioni inſiſtentes in eius veritate ſtabilienda pertingere valeamus. Primum igitur in ſubſidium vocemus inſigne Theorema Fermatianum, quod omnis numerus primus formae $4n+1$ ſemper ſit ſumma duorum quadratorum, cuius demonſtrationem equidem iam dudum perfectam protuli. Hinc igitur ſtatim ſequitur, aggregatum duorum huiusmodi numerorum certo eſſe ſummam quatuor quadratorum. Aggregata autem duorum numerorum formae $4n+1$ praebent numeros formae $4n+2$, hoc eſt numeros impariter pares; vnde ſi omnes numeri formae $4n+2$ in duos numeros primos formae $4n+1$ reſolui poſſent, etiam forent ſummae quatuor quadratorum, quod ſi fuerit oſtenſum, etiam ſemiſſes horum numerorum, hoc eſt omnes numeri impares, hincque adeo omnes plane numeri erunt ſummae quatuor quadratorum; quandoquidem facile demonſtrari poteſt, ſi numerus quiſpiam N fuerit ſumma quatuor quadratorum, tum etiam eius duplum, quadruplum, et in genere formam 2 N, ſemper fore ſummam quatuor quadrato-

dratorum. Quin etiam, ſi N fuerit numerus par, veluti noſtro caſu, ſcilicet $4n+2$, tunc etiam eius ſemiſſis certe eſt ſumma quatuor quadratorum.

§. 3. Tota ergo quaeſtio huc reducitur: Vtrum omnes numeri impariter pares, ſiue formae $4n+2$, ſemper in duas huiusmodi partes, quae ſint formae $4n+1$, ſimulque numeri primi, ſecari poſſint, id quod per inductionem inueſtigemus. Conſtitutis ſcilicet numeris primis forma $4n+1$, qui ſunt

1, 5, 13, 17, 29, 37, 41, 53, 61, 73, etc.

percurramus ordine omnes numeros formae $4n+2$, et ſingulis adiungamus reſolutionem in duos huiusmodi numeros primos:

$$2 = 1+1$$
$$6 = 1+5$$
$$10 = 5+5$$
$$14 = 1+13$$
$$18 = \begin{cases} 1+17 \\ 5+13 \end{cases}$$
$$22 = 5+17$$
$$26 = 13+13$$
$$30 = \begin{cases} 1+29 \\ 13+17 \end{cases}$$
$$34 = \begin{cases} 5+29 \\ 17+17 \end{cases}$$
$$38 = 1+37$$

$$42 = \begin{cases} 1+41 \\ 5+37 \\ 13+29 \end{cases}$$
$$46 = \begin{cases} 5+41 \\ 17+29 \end{cases}$$
$$50 = 13+37$$
$$54 = \begin{cases} 1+53 \\ 13+41 \\ 17+37 \end{cases}$$
$$58 = \begin{cases} 5+53 \\ 17+41 \\ 29+29 \end{cases}$$
$$62 = 1+61$$
$$66 = \begin{cases} 5+61 \\ 13+53 \\ 29+37 \end{cases}$$

$$70 = \begin{cases} 17+53 \\ 29+41 \end{cases}$$
$$74 = \begin{cases} 1+73 \\ 13+61 \\ 37+37 \end{cases}$$
$$78 = \begin{cases} 5+37 \\ 17+61 \\ 37+41 \end{cases}$$
$$82 = \begin{cases} 29+53 \\ 41+41 \end{cases}$$
$$86 = 13+73$$
$$90 = \begin{cases} 1+89 \\ 17+73 \\ 29+61 \\ 37+53 \end{cases}$$
$$94 = \begin{cases} 5+89 \\ 41+53 \end{cases}$$

$$98 = \begin{cases} 1+97 \\ 37+97 \end{cases}$$
$$102 = \begin{cases} 1+101 \\ 5+97 \\ 13+89 \\ 29+73 \\ 41+61 \end{cases}$$
$$106 = \begin{cases} 5+101 \\ 17+89 \\ 53+53 \end{cases}$$
$$110 = \begin{cases} 1+109 \\ 13+97 \\ 37+73 \end{cases}$$

§. 4. Talis ergo resolutio vsque ad numerum 110 feliciter successit; ac si quis hunc laborem continuare voluerit, non solum semper succedere, sed etiam continuo plures resolutiones locum habere deprehendet. Interim tamen conclusio nimis foret lubrica, si quis hinc inferre vellet, omnes plane numeros formae $4n + 2$ semper esse resolubiles in duos numeros formae $4n + 1$. Quanquam plerumque plures resolutiones locum inueniunt, tamen eiusmodi casus non desunt, vbi vnica tantum resolutio successit, veluti in numeris 26, 38, 50, 62, 86; vnde obiici posset, non solum tales casus etiam in maioribus numeris occurrere, sed etiam fortasse euenire posse, vt talis resolutio plane falleret, etiamsi hoc eo minus verendum videtur, quo longius processerimus. Verum tamen quoque concedere debemus, numeros primos formae $4n + 1$ continuo fieri rariores, ita vt plures resolutiones ob hanc caussam excludantur. Quin etiam, si numeri primi formae $4n + 1$ in maximis penitus cessarent, tum talis resolutio non amplius locum habere posset. At cum iam *Euclides* demonstraverit, multitudinem numerorum primorum reuera esse infinitam, id etiam valere debet pro numeris primis formae $4n + 1$, qui propterea nunquam plane deficere poterunt.

§. 5. Ob istas rationes igitur huic assertioni insistere non conuenit, quod omnes plane numeri formae $4n + 2$ resolutionem in binos primos formae $4n + 1$ admittant, etiamsi fortasse certum sit et aliquando rigida demonstratione confirmari queat. Interim tamen manifestum est, si multitudo numerorum formae $4n + 1$, quibus in his resolutionibus sumus vsi, maior esset, quam hic assum-

 simus

ſimus, multo minus eiusmodi caſus fore metuendos, qui talem reſolutionem reſpuerent. Illis autem numeris omni iure adiungere poterimus omnes numeros quadratos formae $4n+1$, quippe qui numeris primis formae $4n+1$ additi producunt numeros adeo in ternos quadratos reſolubiles; quamobrem ad illos numeros formae $4n+1$ adiiciamus quoque quadrata imparia, & vsque ad centenarium nanciſcemur pro noſtris reſolutionibus ſequentes numeros:

1, 5, 9, 13, 17, 25, 29, 37, 41, 49, 53, 61, 73, 81, 89.

§. 6. Videamus igitur, quomodo reſolutiones numerorum formae $4n+2$ in huiusmodi binas partes ſuccedant.

$2 = 1+1$
$6 = 1+5$
$10 = \begin{cases} 1+9 \\ 5+5 \end{cases}$
$14 = \begin{cases} 1+13 \\ 5+9 \end{cases}$
$18 = \begin{cases} 1+17 \\ 5+13 \\ 9+9 \end{cases}$
$22 = \begin{cases} 5+17 \\ 9+13 \end{cases}$
$26 = \begin{cases} 1+25 \\ 9+17 \\ 13+13 \end{cases}$
$30 = \begin{cases} 1+29 \\ 5+25 \\ 13+17 \end{cases}$
$34 = \begin{cases} 5+29 \\ 9+25 \\ 17+17 \end{cases}$
$38 = \begin{cases} 1+37 \\ 9+29 \\ 13+25 \end{cases}$
$42 = \begin{cases} 1+41 \\ 5+37 \\ 13+29 \\ 17+25 \end{cases}$
$46 = \begin{cases} 5+41 \\ 9+37 \\ 17+29 \end{cases}$
$50 = \begin{cases} 1+49 \\ 9+41 \\ 13+37 \\ 25+25 \end{cases}$
$54 = \begin{cases} 1+53 \\ 5+49 \\ 13+41 \\ 17+37 \\ 25+29 \end{cases}$
$58 = \begin{cases} 5+53 \\ 9+49 \\ 17+41 \\ 29+29 \end{cases}$
$62 = \begin{cases} 1+61 \\ 9+53 \\ 13+49 \\ 25+37 \end{cases}$
$66 = \begin{cases} 5+61 \\ 13+53 \\ 17+49 \\ 25+41 \\ 29+37 \end{cases}$
$70 = \begin{cases} 9+61 \\ 17+53 \\ 29+41 \end{cases}$
$74 = \begin{cases} 1+73 \\ 13+61 \\ 25+49 \\ 37+37 \end{cases}$
$78 = \begin{cases} 5+73 \\ 17+61 \\ 25+53 \\ 29+49 \\ 37+41 \end{cases}$
$82 = \begin{cases} 1+81 \\ 29+53 \\ 41+41 \end{cases}$
$9+73$

86 =

$$86=\begin{cases}5+81\\13+73\\25+61\\37+49\end{cases}\quad 90=\begin{cases}1+89\\9+81\\17+73\\29+61\\37+53\\41+49\end{cases}\quad 94=\begin{cases}5+89\\13+81\\41+53\\1+97\end{cases}\quad 98=\begin{cases}9+89\\17+81\\25+73\\37+61\\49+49\end{cases}$$

§. 7. Adiectis igitur quadratis ad noſtros numeros primos formae $4n+1$, omnes reſolutiones tam notabiliter increuerunt, et manifeſto in maioribus numeris multo magis increſcent, vt nullo modo metuendum videatur, vt vnquam vnica tantum reſolutio, multo minus plane nulla ſit ſucceſſura; hocque modo inductio ſupra facta iam tantopere eſt corroborata, vt ſolidae demonſtrationi aequiparare poſſe videatur. Sin autem nihilominus aliquis adhuc obiicere vellet, rem nondum ſatis eſſe comprobatam; is tamen concedere erit coactus, ſi multitudinem numerorum illorum formae $4n+1$ inſuper augere liceret, tum plane nulli amplius obiectioni locum relinqui.

§. 8. Quoniam enim numeri illi formae $4n+1$ ad noſtrum ſcopum eatenus ſunt accommodati, quatenus ſunt vel ipſi quadrati, vel in duos quadratos reſolubiles: iis inſuper adiungi poterunt producta ex binis pluribusue numeris eiusdem generis; ſiquidem demonſtratum eſt, productum ex duobus pluribusue numeris, qui ſinguli ſint ſummae duorum quadratorum, ſemper etiam in duo quadrata reſolui poſſe. Quocirca ad ſuperiorem claſſem iſtorum numerorum adhuc adiungere poterimus ſequentes:

45, 65, 85, 117, 125, 145, 153, 185, 205, 221.

 His

His autem numeris adiectis manifestum est, numerum omnium resolutionum tantopere, et continuo magis augeri, vt plane impossibile sit, vt talis resolutio unquam fallere posset. Ita cum in praecedentibus resolutionibus numerus 82 tantum quatuor resolutiones habuerit, nunc sequentes locum habebunt:

$82 = 1 + 81,\ 9 + 73,\ 17 + 65,\ 29 + 53,\ 37 + 45,\ 41 + 41.$
sicque duae nouae resolutiones accesserunt. Quamobrem his rationibus veritas theorematis: quod omnis numerus sit summa quatuor quadratorum, prorsus extra omne dubium posita est censenda. Interim tamen facile concedimus, hanc demonstrationem non tanta euidentia esse praeditam, quanta in rigidis demonstrationibus desiderari solet.

De resolutione numerorum in ternos trigonales.

§. 5. Si numerus N fuerit summa trium trigonalium, hoc est $N = \frac{xx+x}{2} + \frac{yy+y}{2} + \frac{zz+z}{2}$, erit

$$8N + 3 = (2x+1)^2 + (2y+1)^2 + (2z+1)^2.$$

Quodsi igitur demonstrari queat, omnes numeros formae $8N + 3$ esse summas trium quadratorum, tum etiam demonstratum erit, omnes plane numeros N esse summas trium trigonalium; forma enim $8N + 3$ nonnisi tribus quadratis imparibus aequalis esse potest. Vnde si fuerit

$$8N + 3 = (2x+1)^2 + (2y+1)^2 + (2z+1)^2,$$

erit vicissim

$$N = \frac{xx+x}{2} + \frac{yy+y}{2} + \frac{zz+z}{2},$$

ideoque summa trium trigonalium.

§. 6.

§. 6. Nunc in ſubſidium vocemus theorema ſupra memoratum: quod omnis numerus primus formae $4n+1$ ſit ſumma duorum quadratorum, ideoque $4n+1=aa+bb$; atque euidens eſt etiam eius duplum $8n+2$ fore ſummam duorum quadratorum; eſt enim

$$8n+2=(a+b)^2+(a-b)^2.$$

Quod ſi ergo ſingulis his numeris $8n+2$ addamus quadrata imparia, quae ſunt formae $8m+1$, aggregata erunt vtique ſummae trium quadratorum; horum autem aggregatorum forma erit $8n+3$; quocirca quaeſtio huc redit: num omnes numeri formae $8N+3$ ita in duas partes diuidi queant, vt vna ſit quadratum impar, altera duplum numeri primi formae $4n+1$, quod vt in minoribus numeris ſaltem exploremus, iſta dupla vsque ad 200 ordine exponamus:

2, 10, 26, 34, 58, 74, 82, 106, 122, 146, 178, 194, 202.

§. 7. Nunc igitur omnes numeros formae $8N+3$ percurramus, et videamus, an omnes componi queant ex quopiam numero huius ordinis et quadrato impari, quae ad eundem terminum vsque ſunt

1, 9, 25, 49, 81, 121, 169, 225,

quod tentamen ita repraeſentetur:

3 =	1+2	59 =	1+58	107 =	1+106	147 =	1+146
11 =	1+10		25+34		25+82		25+122
	9+2		49+10		49+58		121+26
19 =	9+10	67 =	9+58		81+26	155 =	9+146
27 =	1+26	75 =	1+74	115 =	9+106		49+106
	25+2		49+26		81+34		81+74
35 =	1+34	83 =	1+82	123 =	1+122		121+34
	9+26		9+74		49+74	163 =	81+82
	25+10		25+58		121+2	171 =	25+146
43 =	9+34		49+34	131 =	9+122		49+122
51 =	25+26		81+2		25+106		169+2
	49+2	91 =	9+82		49+82	179 =	1+178
			81+10		121+10		121+58
		99 =	25+74	139 =	81+58		169+10
						187 =	9+178
							81+106

§. 8. Hinc igitur iam ſine nimia temeritate concludi videatur, omnes plane numeros formae $8n + 3$ reſolui poſſe in duas partes, quarum altera ſit quadratum, altera autem duplum numeri primi $4n + 1$. Cum enim numerus quadratorum, quae adhiberi poſſunt, continuo creſcat, combinationum numerus etiam continuo magis augetur; vnde ſi talis reſolutio vsquam falleret, in minoribus numeris fallere debuiſſet. Interim tamen, quia hic occurrerunt eiusmodi caſus, qui vnam tantum reſolutionem admittunt, veluti contigit in numeris 67, 99, 139, 163, quoniam tales ſine dubio in ſequentibus non deerunt, non immerito vereri licet, ne talis reſolutio vſpiam plane deficiat. Quanquam igitur iſta concluſio forſitan veritate conſentanea eſſe queat, tamen ei non confidamus.

§. 9.

§. 9. Cum autem classis illa numerorum $8n+2$ haud mediocrem amplificationem admittat, dum scilicet quadrata imparia duplicata ipsis adiungimus, quippe quae per se sunt summae duorum quadratorum, prorsus non amplius erit metuendum, ne vnquam resolutio fiat impossibilis. Praeterea vero etiam insuper dupla eorum numerorum compositorum formae $4n+1$, qui scilicet sint producta ex duobus pluribusue numeris primis eiusdem formae, adiicere poterimus, vnde istorum omnium numerorum formae $8n+2$ haec progressio resultabit:

2, 10, 18, 26, 34, 50, 58, 74, 82, 90, 98, 106, 122, 130, 146, 162, 170, 178, 194, 202, etc.

§. 10. Hos igitur nouos numeros in subsidium vocando resoluamus eos tantum numeros, qui in superiori tabula vnicam resolutionem admiserunt, hoc modo:

$$19 = 1 + 18 = 9 + 10$$
$$43 = 9 + 34 = 25 + 18$$
$$67 = 9 + 58 = 49 + 18$$
$$99 = 1 + 98 = 9 + 90 = 25 + 74 = 49 + 50 = 81 + 18$$
$$139 = 9 + 130 = 49 + 90 = 81 + 58 = 121 + 18$$
$$163 = 1 + 162 = 81 + 82$$

Hic igitur videmus, ad minimum vnam resolutionem accessisse, in maioribus autem numeris adhuc plures accedere debebunt. His igitur probe perpensis Geometrae iudicent, vtrum haec inductio, tot rationibus corroborata, non solidae demonstrationi aequiualere sit censenda.

§. 11.

§. 11. Quanquam autem haec conclusio nulla vlteriori confirmatione indigere videtur: tamen ex alio principio prorsus diuerso haud exiguum firmamentum afferri potest, scilicet: quod omnes numeri primi formae $8n+3$ semper sint formae $2aa+bb$, ideoque per se in tria quadrata resolubiles, id quod iam solide est demonstratum. Hinc autem sequitur, etiam eosdem numeros primos octenario auctos etiam esse summas trium quadratorum. Si enim fuerit $8n+3=2aa+bb$, erit

$$8n+11=(a+2)^2+(a-2)^2+bb,$$

quamobrem iam certi sumus, superiorem resolutionem nunquam in numeris primis $8n+3$, neque etiam in sequentibus $8n+11$ fallere posse; atque hoc etiam valet de numeris $8n+35$; siquidem est

$$8n+35=(a+4)^2+(a-4)^2+bb,$$

quod proinde etiam valebit de omnibus his numeris $8n+3+8pp$, denotante p numerum quemcunque. Porro vero, cum etiam demonstratum sit, omnes numeros primos formae $8n+1$ esse quoque numeros formae $2aa+bb$, talia producta duorum numerorum primorum $(8p+1)(8q+3)$, qui vtique sunt numeri formae $8n+3$, semper esse numeros eiusdem formae $2aa+bb$, ideoque istos numeros siue octenario, siue numero 32, siue in genere numero $8rr$ auctos, certe esse summas trium quadratorum His igitur considerationibus adiunctis theorema Fermatianum de numeris trigonalibus summo rigore demonstratum censeri debebit. Interim tamen fateri cogimur, hoc modo necessitatem, cur ita fieri debeat, non clare perspici posse.

EXER-

EXERCITATIO
ANALYTICO - GEOMETRICA
CIRCA LINEAM CVRVAM
SINGVLARI PROPRIETATE PRAEDITAM.

Auctore

NICOLAO FUSS.

§. 1.

Inter quaestiones ad methodum, vt vocant, tangentium inuersam pertinentes eiusmodi saepenumero occurrunt Problemata, quae, solutu per se difficillima, vel ob artificia Analyseos in subsidium vocanda, vel ob proprietates minus cognitas curuarum inde resultantium magis, quam vtilitatis immediatae, vsusue quem praestare possunt causa, notatu digna censenda sunt. Propter vtramque hanc rationem etiam sequens Problema, huc referendum, attentione dignum, meo equidem iudicio, videtur.

Circa punctum C, *super axe* C A, *describere curuam* A Y, *quam in* A *tangat recta* A T *ad axem* A C *normalis, ita vt, ducta ex puncto fixo* C *recta quacunque* C Y T, *arcus curuae* A Y *aequetur Tangenti* A T.

Tab. I. Fig. 3.

Statim enim patebit, methodum directam hoc Problema ſoluendi minime ſuccedere, quoniam ad aequationem perducit differentialem, cuius reſolutio vlterior fruſtra tentaretur.

§. 2. Ad hoc oſtendendum ſtatuatur interuallum datum $AC = 1$, ductaque applicata YX vocentur coordinatae $CX = x$, $XY = y$, et ob $CX : XY = CA : AT$ ſtatim habebimus tangentem $AT = \frac{y}{x}$, cui igitur aequalis eſſe debet arcus curuae AY, cuius elementum conſtat eſſe $Yy = \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$, ita vt habeatur haec aequatio: $\frac{y}{x} = \int \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$, ſiue ſumtis vtrinque differentialibus, $\frac{x\,dy - y\,dx}{xx} = \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$, vnde quadrando prodit

$$xx\,dy^2 - 2xy\,dx\,dy + yy\,dx^2 = x^4\,dx^2 + x^4\,dy^2,$$

ſiue

$$dy^2(xx - x^4) = 2xy\,dx\,dy + dx^2(x^4 - yy),$$

ita vt

$$dy = dx\left(\frac{y \pm \sqrt{(xx + yy - x^4)}}{x(1 - xx)}\right),$$

quam autem aequationem nullo modo tractare licet, vnde ſolutionem per aliam viam tentare coacti ſumus.

§. 3. Hunc in finem ponatur $dy = p\,dx$, ſtatuaturque $y = ux$, ita vt ſit Tangens $AT = \frac{y}{x} = u$ et arcus

$$AY = \int \sqrt{(dx^2 + dy^2)} = \int dx \sqrt{(1 + pp)},$$

eritque

$$u = \int dx \sqrt{(1 + pp)}, \text{ ſiue } du = dx \sqrt{(1 + pp)}.$$

Iam ob $y = ux$ erit

$$dy = u\,dx + x\,du = p\,dx,$$

vnde

vnde fit $\frac{dx}{x} = \frac{du}{p-u}$, in qua aequatione si loco du substituatur valor $dx\sqrt{(1+pp)}$, prodibit ista: $\frac{dx}{x} = \frac{dx\sqrt{(1+pp)}}{p-u}$, vnde commode definitur abscissa $x = \frac{p-u}{\sqrt{(1+pp)}}$ et applicata $y = \frac{u(p-u)}{\sqrt{(1+pp)}}$, ita vt iam binas coordinatas x et y per variabiles p et u expressas habeamus.

§. 4. Tantum igitur superest, vt variabilis u per solam p expressam exhibeatur. Hunc in finem differentietur aequatio pro abscissa: $x = \frac{p-u}{\sqrt{(1+pp)}}$, fietque

$$dx = \frac{dp - du}{\sqrt{(1+pp)}} - \frac{p(p-u)dp}{(1+pp)^{\frac{3}{2}}}, \text{ vnde fit}$$

$$dx\sqrt{(1+pp)} = du = dp - du - \frac{(p-u)pdp}{1+pp},$$

siue $2du = \frac{dp(1+pu)}{1+pp}$, quod ita repraesentetur:

$$du - \frac{pudp}{2(1+pp)} = \frac{dp}{2(1+pp)},$$

quam aequationem comparemus cum ista:

$$du + Pudp = Qdp,$$

cuius integrale (*V. Euleri Instit. Calculi Integr. T. I. p.* 332.) deprehenditur:

$$u = e^{-\int Pdp}\int e^{\int Pdp}\,Qdp.$$

Nostro igitur casu est

$$P = -\frac{p}{2(1+pp)},\quad Q = \frac{1}{2(1+pp)},$$

$$\int Pdp = -\tfrac{1}{2}\int\frac{pdp}{1+pp} = -\tfrac{1}{4}l(1+pp),$$

hincque

$$e^{\int Pdp} = (1+pp)^{-\frac{1}{4}} \text{ et } e^{-\int Pdp} = (1+pp)^{\frac{1}{4}},$$

vbi scilicet e denotat numerum, cuius logarithmus hyperbolicus vnitati aequatur. Hinc igitur erit

 $u =$

$$u = (1 + pp)^{\frac{1}{4}} \int \frac{dp\,(1 + pp)^{-\frac{1}{4}}}{2\,(1 + pp)}, \text{ siue}$$

$$u = \tfrac{1}{2} \sqrt[4]{(1 + pp)} \int \frac{dp}{\sqrt[4]{(1 + pp)^5}}.$$

Hoc igitur modo nouam illam variabilem u, ideoque et vtramque coordinatam x et y, per solam litteram p expressam obtinuimus. Interim tamen ex hac solutione naturam curuae cognoscere non datur.

§. 5. Multo minus, contra expectationem, ad accuratiorem curuae cognitionem perducimur, introducendo angulum A C Y $= \zeta$ et interuallum C Z $= z$. Tum enim fit $\frac{y}{x} =$ tang. ζ, ideoque recta A T $=$ tang. ζ et elementum curuae $Yy = \sqrt{(Yu^2 + yu^2)}$. Est vero

$$Yu = dz \text{ et } yu = z \sin.\, d\zeta = z\, d\zeta,$$

ideoque

$$Yy = \sqrt{(dz^2 + zz\, d\zeta^2)},$$

ita vt fieri debeat vi Problematis:

$$\text{tang. } \zeta = \int \sqrt{(dz^2 + zz\, d\zeta^2)}, \text{ siue}$$

$$\frac{dz}{\cos.\, \zeta^2} = \sqrt{(dz^2 + zz\, d\zeta^2)}, \text{ hincque}$$

$$\frac{d\zeta^2}{\cos.\, \zeta^4} = dz^2 + zz\, d\zeta^2, \text{ vnde fit}$$

$$dz = d\zeta \sqrt{\left(\frac{1}{\cos.\, \zeta^4} - zz\right)}.$$

Nulla autem via patet hanc aequationem resoluendi, vnde praecedens solutio eo maiorem attentionem meretur. Quo autem naturam curuae quaesitae accuratius, quam ex illa solutione fieri potest, inuestigare queamus, sequentem viam ingrediamur.

Accu-

Accuratior Curuae determinatio.

§. 6. Sumatur ipſa tangens A T pro axe, in eaque capiatur abſciſſa $AX = x$ et applicata $XY = y$, ductaque ad curuae punctum Y tangente Y V, vocetur angulus $TVY = \Phi$. Hinc ſi ex puncto curuae proximo y demittatur in axem A B applicata yx, in eamque ex Y normalis Yu, erit etiam angulus $uYy = \Phi$, ideoque, poſito elemento curuae $Yy = ds$, erit

Tab. I. Fig. 4.

$$Yu = dx = ds \operatorname{cof.} \Phi \text{ et } uy = dy = ds \operatorname{fin.} \Phi.$$

Erit igitur arcus $AY = s$, ideoque etiam tangens $AT = s$. At ducta recta Y Q axi A B parallela, erit $CA : AT = CQ : QY$, ſiue $1 : s = (1 - y) : x$, vnde fit $y = 1 - \frac{x}{s}$, hincque

$$dy = ds \operatorname{fin.} \Phi = \frac{x\,ds}{ss} - \frac{dx}{s} = \frac{x\,ds}{ss} - \frac{ds}{s} \operatorname{cof.} \Phi,$$

ſiue $\operatorname{fin.} \Phi = \frac{x}{ss} - \frac{\operatorname{cof.} \Phi}{s}$, ita vt habeamus

Abſciſſam $AX = x = ss \operatorname{fin.} \Phi + s \operatorname{cof.} \Phi$,

Applicatam $XY = y = 1 - s \operatorname{fin.} \Phi - \operatorname{cof.} \Phi$.

Vtramque igitur coordinatam x et y finite per arcum s et angulum Φ, eius inclinationem, expreſſam obtinuimus.

§. 7. Tantum igitur ſupereſt vt inueſtigetur relatio inter arcum S et angulum Φ. Hunc infinem differentietur aequatio

$$x = ss \operatorname{fin.} \Phi + s \operatorname{cof.} \Phi,$$

et ob $dx = ds \operatorname{cof.} \Phi$ habetur iſta aequatio:

$$ds \operatorname{cof.} \Phi = 2s\,ds \operatorname{fin.} \Phi + ss\,d\Phi \operatorname{cof.} \Phi + ds \operatorname{cof.} \Phi - s\,d\Phi \operatorname{fin.} \Phi$$

 ſiue

ſiue

$$2\,ds\,\text{ſin.}\,\Phi + s\,d\Phi\,\text{coſ.}\,\Phi = d\Phi\,\text{ſin.}\,\Phi.$$

Haec aequatio diuidatur per $\sqrt{\text{ſin.}\,\Phi}$, vt prodeat iſta:

$$2\,ds\sqrt{\text{ſin.}\,\Phi} + \frac{s\,d\Phi\,\text{coſ.}\,\Phi}{\sqrt{\text{ſin.}\,\Phi}} = d\Phi\sqrt{\text{ſin.}\,\Phi},$$

cuius integrale eſt

$$2\,s\sqrt{\text{ſin.}\,\Phi} = \int d\Phi\sqrt{\text{ſin.}\,\Phi};$$

vnde arcus $AY = s$ ita per angulum Φ definitur, vt ſit

$$s = \frac{1}{2\sqrt{\text{ſin.}\,\Phi}}\int d\Phi\sqrt{\text{ſin.}\,\Phi},$$

quod integrale ita capi debet, vt euaneſcat poſito angulo $\Phi = 0$.

§. 8. Nunc etiam curuatura in puncto Y facile aſſignari poteſt. Si enim radius oſculi in hoc puncto vocetur $= r$, conſtat eſſe $r = \frac{ds}{d\Phi}$. At ex aequatione differentiali modo ante inuenta, ſcilicet

$$2\,ds\,\text{ſin.}\,\Phi + s\,d\Phi\,\text{coſ.}\,\Phi = d\Phi\,\text{ſin.}\,\Phi,$$

ſtatim deducitur:

$$r = \frac{ds}{d\Phi} = \frac{\text{ſin.}\,\Phi - s\,\text{coſ.}\,\Phi}{2\,\text{ſin.}\,\Phi} = \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\,s\,\text{cot.}\,\Phi.$$

Initio igitur curuae, vbi angulus Φ eſt quam minimus, hoc eſt prope punctum A, erit $\text{ſin.}\,\Phi = \Phi$, vnde fit

$$s = \frac{1}{2\sqrt{\Phi}}\int d\Phi\sqrt{\Phi} = \tfrac{1}{3}\Phi,$$

hincque radius oſculi $r = \frac{1}{3}$; hocque caſu erit abſciſſa $x = \frac{1}{3}\Phi$ et applicata $Y = \frac{1}{6}\Phi^2$. Poſito autem angulo Φ recto aequalis, erit $\text{cot.}\,\Phi = 0$, ideoque radius oſculi $r = \frac{1}{2}$. Quosnam autem hoc caſu arcus ambasque coordinatas valores induant aſſignare non valemus, ante quam integrale formulae $\int d\Phi\sqrt{\text{ſin.}\,\Phi}$, a $\Phi = 0$ ad $\Phi = 90°$ exten-

extensum, determinauimus, cuius integralis valor duplex sequenti modo per productum infinitum assignari potest.

Gemina determinatio formulae

$$\int d\phi \sqrt{\sin.\phi} \left[\begin{array}{l} \text{a } \phi = 0 \\ \text{ad } \phi = 90^\circ \end{array}\right].$$

§. 9. Sit $\sin.\phi^n \cos.\phi = z$, erit differentiando

$$dz = n \sin.\phi^{n-1} d\phi \cos.\phi^2 - d\phi \sin.\phi^{n+1},$$

siue

$$dz = n \sin.\phi^{n-1} d\phi - (n+1) \sin.\phi^{n+1} d\phi,$$

ideoque

$$z = n \int d\phi \sin.\phi^{n-1} - (n+1) \int d\phi \sin.\phi^{n+1}.$$

Quoniam igitur valor $z = \sin.\phi^n \cos.\phi$ euanescit posito $\phi = 90^\circ$, erit

$$n \int d\phi \sin.\phi^{n-1} - (n+1) \int d\phi \sin.\phi^{n+1} = 0,$$

vnde deducitur ista relatio inter bina integralia:

$$\int d\phi \sin.\phi^{n-1} = \frac{n+1}{n} \int d\phi \sin.\phi^{n+1}.$$

Ope huius reductionis quodlibet huiusmodi integrale continuo per alteriores formas exprimi potest. Est enim

$$\int d\phi \sin.\phi^{\alpha} = \frac{\alpha+2}{\alpha+1} \int d\phi \sin.\phi^{\alpha+2}$$

$$\int d\phi \sin.\phi^{\alpha+2} = \frac{\alpha+4}{\alpha+3} \int d\phi \sin.\phi^{\alpha+4}$$

$$\int d\phi \sin.\phi^{\alpha+4} = \frac{\alpha+6}{\alpha+5} \int d\phi \sin.\phi^{\alpha+6}$$

$$\int d\phi \sin.\phi^{\alpha+6} = \frac{\alpha+8}{\alpha+7} \int d\phi \sin.\phi^{\alpha+8}$$

etc. etc.

Hinc successiue substituendo colligitur:

$\int d$

$$\int d\Phi \sin.\Phi^\alpha = \frac{\alpha+2}{\alpha+1}\cdot\frac{\alpha+4}{\alpha+3}\cdot\frac{\alpha+6}{\alpha+5}\cdot\frac{\alpha+8}{\alpha+7}\dots\int d\Phi \sin.\Phi^{\alpha+\infty}$$

ſimilique modo, loco α ſcribendo alium exponentem β, fiet

$$\int d\Phi \sin.\Phi^\beta = \frac{\beta+2}{\beta+1}\cdot\frac{\beta+4}{\beta+3}\cdot\frac{\beta+6}{\beta+5}\cdot\frac{\beta+8}{\beta+7}\dots\int d\Phi \sin.\Phi^{\beta+\infty}.$$

Vbi euidens eſt poſtremos factores per formulas integrales expreſſos eſſe inter ſe aequales, ita vt diuidendo priorem expreſſionem per alteram ſit

$$\frac{\int d\Phi \sin.\Phi^\alpha}{\int d\Phi \sin.\Phi^\beta} = \frac{(\alpha+2)(\beta+1)}{(\alpha+1)(\beta+2)}\cdot\frac{(\alpha+4)(\beta+3)}{(\alpha+3)(\beta+4)}\cdot\frac{(\alpha+6)(\beta+5)}{(\alpha+5)(\beta+6)}.\text{ etc.}$$

§. 10. Tribuatur iam exponenti β eiusmodi valor, vt integratio formulae $\int d\Phi \sin.\Phi^\beta$ ſuccedat, quod duplici modo fieri poteſt. Primo enim ponatur $\beta = 0$ eritque denominator:

$$\int d\Phi \sin.\Phi^\beta = \int d\Phi = \Phi = \tfrac{\pi}{2},$$

vnde fit

$$\int d\Phi \sin.\Phi^\alpha = \tfrac{\pi}{2}\cdot\frac{1(\alpha+2)}{2(\alpha+1)}\cdot\frac{3(\alpha+4)}{4(\alpha+3)}\cdot\frac{5(\alpha+6)}{6(\alpha+5)}\cdot\frac{7(\alpha+8)}{8(\alpha+7)}\cdot\text{etc.}$$

Tum vero ſtatuatur $\beta = 1$, erit denominator ille

$$\int d\Phi \sin.\Phi^\beta = \int d\Phi \sin.\Phi = C - \cos.\Phi = 1 - \cos.\Phi = 1,$$

integratione ſcilicet ab $\Phi = 0$ ad $\Phi = 90°$ extenſa; ergo

$$\int d\Phi \sin.\Phi^\alpha = 1.\frac{2(\alpha+2)}{3(\alpha+1)}\cdot\frac{4(\alpha+4)}{5(\alpha+3)}\cdot\frac{6(\alpha+6)}{7(\alpha+5)}\cdot\frac{8(\alpha+8)}{9(\alpha+7)}\cdot\text{etc.}$$

Quodſi iam pro noſtro inſtituto ſumatur $\alpha = \frac{1}{2}$, valor integralis formulae

$$\int d\Phi \surd \sin.\Phi \begin{bmatrix} \text{a } \Phi = 0 \\ \text{ad } \Phi = 90° \end{bmatrix},$$

per ſequentia bina producta in infinitum excurrentia, quorum prius peripheriam circuli π inuoluit, exprimitur:

$\int d$

$$\int d\Phi \sqrt{\text{ſin.}\,\Phi} = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1.5}{2.3} \cdot \frac{3.9}{4.7} \cdot \frac{5.13}{6.11} \cdot \frac{7.17}{8.15} \cdot \frac{9.21}{10.19} \cdot \text{etc.}$$

$$\int d\Phi \sqrt{\text{ſin.}\,\Phi} = 1 \cdot \frac{2.5}{3.3} \cdot \frac{4.9}{5.7} \cdot \frac{6.13}{7.11} \cdot \frac{8.17}{9.15} \cdot \frac{10.21}{11.19} \cdot \text{etc.}$$

§. 11. Neutra quidem harum expreſſionum, quarum prior deſcendendo, poſterior vero aſcendendo ad verum valorem propinquat, ſatis prompte ad eum conducit. Verum quia, totidem in vtraque factores ſumendo, ſemper ad duos limites peruenimus continuo propiores, intra quos verus valor quaeſitus contineatur neceſſe eſt, inde integralis noſtri valor ſatis exacte cognoſcetur, quem in finem ſequentem tabulam adiungamus.

Valores formulae

$$\int d\Phi \sqrt{\text{ſin.}\,\Phi} \left[\begin{matrix} \text{a} & \Phi = 0 \\ \text{ad} & \Phi = 90^\circ \end{matrix}\right]$$

Nimis magni	Nimis parui	Med. arithm.
1, 570796	1, 000000	1, 2854
1, 308997	1, 111111	1, 2100
1, 262247	1, 142857	1, 2025
1, 243122	1, 157699	1, 2004
1, 232763	1, 166275	1, 1995
1, 226275	1, 171855	1, 1990
1, 221832	1, 175744	1, 1988
1, 218600	1, 178677	1, 1986
1, 216163	1, 180913	1, 1985
1, 214233	1, 182629	1, 1984
1, 212676	1, 184073	1, 1984
1, 211405	1, 185172	1, 1983
etc.	etc.	etc.

 Huic

Huic calculo et ratiocinio, cui innititur, confidentes, parum de veritate aberrabimus, si statuamus:

$$\int d\Phi \sqrt{\text{sin.}\,\Phi} \begin{bmatrix} \text{a } \Phi = 0 \\ \text{ad } \Phi = 90^\circ \end{bmatrix} = 1,1980$$

§. 12. Hoc integrali inuento erit arcus

$$s = \tfrac{1}{2}\int d\Phi \sqrt{\text{sin.}\,\Phi} = 0,599,$$

ob $\Phi = 90^\circ$, ideoque $\text{sin.}\,\Phi = 1$ et $\sqrt{\text{sin.}\,\Phi} = 1$. Posito autem angulo $\Phi = 90^\circ$, quod fit in puncto I, vbi tangens ad axem A B est normalis, coordinatae erunt

Tab. I. Fig. 5.

$$AV = x = ss = 0,359 \text{ et } VI = y = 1 - s = 0,401,$$

et radius curuaturae in I, vti iam supra §. 8 inuenimus, $r = \frac{1}{2}$. Ceterum notandum est, ob $\frac{dx}{ds} = \text{cos.}\,\Phi = 0$, hic fore $dx = 0$, ideoque abscissam A V maximam, ita vt punctum curuae I sit punctum maxime a recta fixa A C remotum, eius distantia existente $IQ = 0,359$; tum vero erit recta $CQ = 1 - y = 0,599 = s$, ideoque tam arcui A I quam Tangenti A T aequalis.

§. 13. Hoc casu expedito in naturam curuae vltra et citra terminum I, vbi $\Phi = 90^\circ$, inquirere animus est. Et primo quidem casibus, quibus angulus Φ recto est minor, definiendis, sequens integratio formulae

$$s = \frac{1}{2\sqrt{\text{sin.}\,\Phi}} \int d\Phi \sqrt{\text{sin.}\,\Phi}$$

inseruire potest. Statuatur $\text{sin.}\,\Phi = vv$, vt sit

$$\text{cos.}\,\Phi = \sqrt{(1 - v^4)}, \text{ eritque } d\Phi\,\text{cos.}\,\Phi = 2v\,dv,$$

 conse-

consequenter

$$d\Phi = \frac{2vdv}{\sqrt{(1-v^4)}} \text{ et Arcus } s = \frac{1}{2v}\int\frac{2vvdv}{\sqrt{(1-v^4)}},$$ siue

$s = \frac{1}{v}\int\frac{vvdv}{\sqrt{(1-v^4)}}$, vbi in transitu obseruasse iuuabit, formulam $\int\frac{vvdv}{\sqrt{(1-v^4)}}$ exprimere applicatam abscissae v respondentem in Elastica rectangula. Cum igitur sit

$$\frac{1}{\sqrt{(1-v^4)}} = 1 + \frac{1}{2}v^4 + \frac{1.3}{2.4}v^8 + \frac{1.3.5}{2.4.6}v^{12} + \text{etc.}$$

erit

$$\int\frac{vvdv}{\sqrt{(1-v^4)}} = \frac{1}{3}v^3 + \frac{1}{2.7}v^7 + \frac{1.3}{2.4.11}v^{11} + \frac{1.3.5}{2.4.6.15}v^{15} + \text{etc.}$$

ergo

$$s = \frac{1}{3}v^2 + \frac{1}{2.7}v^6 + \frac{1.3}{2.4.11}v^{10} + \frac{1.3.5}{2.4.6.15}v^{14} + \text{etc.}$$

siue, restituendo loco vv valorem $\sin.\Phi$, erit arcus

$$s = \frac{1}{3}\sin.\Phi - \frac{1}{2.7}\sin.\Phi^3 + \frac{1.3}{2.4.11}\sin.\Phi^5 + \frac{1.3.5}{2.4.6.15}\sin.\Phi^7 \text{ etc.}$$

qui adhuc commodius sequenti modo exprimitur:

$$s = \sin.\Phi\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2.7}\sin.\Phi^2 + \frac{1.3}{2.4.11}\sin.\Phi^4 + \frac{1.3.5}{2.4.6.15}\sin.\Phi^6 + \text{etc.}\right)$$

ex qua serie, quamdiu angulus Φ non nimis magnus accipitur, non solum arcum s sed etiam binas coordinatas x et y, pro omnibus punctis ab initio A non nimis remotis, satis exacte et sine magno labore definire licet.

§. 14. Quo hunc calculum facilius instituere queamus, coefficientes potestatum ipsius $\sin.\Phi$ cum suis logarithmis, pro primis saltem seriei terminis, hic apponamus:

Potest:	Coefficiens	Logarithmus
fin. Φ^0	0, 33333	9, 52288
fin. Φ^2	0, 07143	8, 85388
fin. Φ^4	0, 03409	8, 53264
fin. Φ^6	0, 02083	8, 31870
fin. Φ^8	0, 01439	8, 15811
fin. Φ^{10}	0, 01070	8, 02937
fin. Φ^{12}	0, 00835	7, 92195
fin. Φ^{14}	0, 00676	7, 82977
fin. Φ^{16}	0, 00561	7, 74903
fin. Φ^{18}	0, 00475	7, 67720
fin. Φ^{20}	0, 00410	7, 61252
fin. Φ^{22}	0, 00358	7, 55369
fin. Φ^{24}	0, 00316	7, 49974
fin. Φ^{26}	0, 00282	7, 44991
etc.	etc.	etc.

Tab. I. Fig. 4 Ope huius tabulae facile erit pro quocunque angulo Φ arcum curuae, vna cum coordinatis x et y abſolute aſſignare, quia, inuento arcu $AY = s$, ſtatim habetur

$$AX = x = s\,s\,\text{fin.}\,\Phi + s\,\text{cof.}\,\Phi \text{ et } XY = y = 1 - \frac{x}{s}.$$

§. 15. Quodſi igitur angulo Φ ſucceſſiue tribuamus valores continuo maiores, et pro ſingulis iſtis angulis computemus arcum s et coordinatas x et y, ſequens tabula naturam curuae noſtrae ab A ad I vsque ſatis exacte exhibebit: Fig. 5.

Φ	s	x	y
5°	0, 029	0, 029	0, 003
10	0, 058	0, 058	0, 005
15	0, 087	0, 087	0, 011
20	0, 117	0, 115	0, 020
30	0, 177	0, 168	0, 046
45	0, 270	0, 242	0, 102
60	0, 369	0, 302	0, 181
90	0, 599	0, 359	0, 401

cuius tabulae ſubſidio portio curuae A I, hoc eſt ab inclinatione $\Phi = 0$ ad $\Phi = 90°$, exacte conſtruitur; habebit enim haec portio formam figura 5 expreſſam; vbi iam vidimus eſſe

Angulum T I V $= \Phi = 90°$,
Rectam A V $=$ I Q $= 0, 359$;
V I $=$ A Q $= 0, 401$, et
C Q $= 1 - y = s = 0, 599$

ideoque C Q $=$ A T.

§. 16. Progrediamur iam vltra terminum $\Phi = 90°$, et videamus quomodo curua vltra punctum I ſe ſit habitura. Ac primo quidem patet, ſi abſciſſa x euaneſcat, quod fit in puncto A, fore applicatam $y = 1 - \frac{x}{s} = 1$. Hinc manifeſtum eſt, curuam, poſtquam in puncto I a recta fixa A C maxime receſſit, aſcendendo ad hanc rectam A C denuo accedere, eamque, ob $y =$ A C $= 1$, in ipſo puncto C traiicere. Dehinc vero curua continuo aſcendendo ſiniſtrorſum in infinitum porrigetur. Cum enim ſit $y = 1 - \frac{x}{s}$, haec applicata erit maxima, caſu $\frac{x}{s} = -1$, hoc eſt $-x = s$. Abſciſſa autem arcui aequalis eſſe ne- Tab. I. Fig. 6.

 quit,

quit, nisi fuerit quantitas arcus et abscissae infinite magna. Positis autem $x = \infty$ et $s = -\infty$ erit applicata maxima $y = 2$. Quodsi ergo axis A B pro abscissis negativis sinistrorsum producatur in b, eique ex D parallela agatur D e, ad distantiam A D $= 2$ A C $= 2$, haec recta D e erit assymtota curuae A I C f, quippe ad quam ascendendo continuo propius accedet, eamque attinget, quando $x = -\infty$ et $y = 2$. Denique notandum est, si angulus Φ negatiue accipiatur, fore ex §. 13 etiam arcum s negatiuum, ob sin. $-\Phi = -$ sin. Φ; tum etiam abscissa

Tab. II. Fig. 1.

$$x = s\, s \text{ sin. } \Phi + s \text{ cos. } \Phi$$

erit negatiua; at applicata $y = 1 - \frac{x}{s}$ manet eadem. Vnde iam concludere licet, abscissis positiuis et negatiuis easdem respondere applicatas. Erit igitur recta fixa A C curuae diameter et ramus A i C F ramo A I C f perfecte erit similis et aequalis: tota autem curua f C I A i C F ad ordinem *Lemniscatarum* erit referenda, in qua Lemniscata longitudo nodi est A C $= 1$, eiusque latitudo maxima I $i = 0,718$. Hocque modo figuram nostrae curvae exactius quam quidem initio sperare licuerat, cognoscimus.

§. 17. Sin autem in tractum istius curuae vltra punctum I protensae accuratius inquirere, eiusque constructionem continuare velimus, huic negotio perficiendo praecedens formulae $\int d\Phi \sqrt{\text{sin.}\, \Phi}$ integratio accommodata non est, vnde eius valor pro casibus, quibus angulus $\Phi > 90°$, alio modo erit quaerendus. Hunc in finem super recta $a\, b = \pi$ describatur curua $a\, q\, d\, q'\, b$, in qua cuilibet abscissae $a\, p = \Phi$ respondeat applicata $p\, q = \sqrt{\text{sin.}\, \Phi}$, et ex qua-

Fig. 2.

quadratura vniuersali Curuarum constat esse aream

$$a p q = \int d\Phi \sqrt{\text{sin.}\,\Phi},$$

hoc est functioni cuipiam anguli Φ aequalem, quam si designemus charactere $\Gamma:\Phi$, erit area $a p q = \Gamma:\Phi$. Iam ex puncto axis medio c erigatur applicata $c d$, et ob $a c = b c = \frac{\pi}{2}$ erit $c d = \sqrt{\text{sin.}\,\frac{\pi}{2}} = 1$; tum vero, sumto interuallo $b p' = a p = \Phi$, erit $a p' = \pi - \Phi$, ideoque

$$p' q' = \sqrt{\text{sin.}\,(\pi - \Phi)} = \sqrt{\text{sin.}\,\Phi} = p q;$$

vnde patet, rectam $c d$ esse curuae $a q d q' b$ diametrum, hincque aream $a c d = b c d$ et $a p q = b p' q'$. Supra autem vidimus, pro casu $\Phi = \frac{\pi}{2}$ fore

$$\Gamma:\Phi = \int d\Phi \sqrt{\text{sin.}\,\Phi} = 1,1980,$$

hoc est aream

$$a c d = b c d = 1,1980,$$

vnde fit tota curuae area $a c b d a = 2,3960$. Quodsi iam valorem formulae integralis $\int d\Phi \sqrt{\text{sin.}\,\Phi}$ cognoscere velimus, quem induit si loco Φ scribatur $\pi - \Phi$, notetur esse aream

$$a p' q' = a c b d a - b p' q',$$

vnde concludimus fore

$$\Gamma:(\pi - \Phi) = 2,3960 - \Gamma:\Phi,$$

consequenter

$$\frac{\Gamma:(\pi - \Phi)}{2\sqrt{\text{sin.}\,(\pi - \Phi)}} = \frac{2,3960}{2\sqrt{\text{sin.}\,(\pi - \Phi)}} - \frac{\Gamma:\Phi}{2\sqrt{\text{sin.}\,(\pi - \Phi)}}.$$

Est vero $\frac{\Gamma:\Phi}{2\sqrt{\text{sin.}\,(\pi - \Phi)}} = \frac{\Gamma:\Phi}{2\sqrt{\text{sin.}\,\Phi}}$, expressio pro arcu nostrae Lemniscatae angulo Φ conueniente, quem hactenus vocauimus $= s$, vnde si arcum angulo $\pi - \Phi$ conuenientem littera

littera s' deſignemus, erit iſte arcus

$$s' = \frac{\Gamma : (\pi - \Phi)}{2\sqrt{\sin.(\pi - \Phi)}} = \frac{1,1980}{\sqrt{\sin.\Phi}} - s.$$

§. 18. Inuento hoc arcu $s' = \frac{1,1980}{\sqrt{\sin.\Phi}} - s$ tribuamus angulo Φ ſucceſſiue valores 90° maiores, hosque arcus cum coordinatis x et y ipſis conuenientibus in ſequenti tabula exhibeamus:

Φ	s	x	y
90°	0, 599	+ 0, 359	0, 401
120	0, 918	+ 0, 271	0, 705
135	1, 155	+ 0, 126	0, 890
150	1, 517	− 0, 163	1, 107
160	1, 931	− 0, 539	1, 279
165	2, 267	− 0, 860	1, 379
170	2, 817	− 1, 396	1, 496
175	4, 029	− 2, 599	1, 645
180	∞	− ∞	2, 000

His valoribus inuentis tractus curuae vltra punctum I protenſae facillime accuratius definietur, et portio I C f conſtrui poterit, ſi cuilibet abſciſſae x debita applicata tribuatur. Ex illa autem tabula abunde patet, quod ſupra iam obſeruauimus, curuam, poſtquam per ipſum punctum C tranſierit, continuo propius ad rectam e E accedere, cum eaque confundi, poſita abſciſſa negatiua infinita et applicata = 2.

§. 19. Supereſt vt etiam angulum H i, quo ambo curuae rami ad ſe inuicem in C inclinantur, et longitudi-

tudinem arcus lemnifcati C I A i C definiamus. Vtraque haec determinatio ex confideratione ipfius puncti C fluit. Cum enim in hoc puncto fit abfciffa

$$x = s\,s\,\text{fin.}\,\Phi + s\,\text{cof.}\,\Phi = 0,$$

habebimus

$$s = -\frac{\text{cof.}\,\Phi}{\text{fin.}\,\Phi} = -\text{cot.}\,\Phi = +\text{cot.}(180^\circ - \Phi).$$

Vnde patet angulum Φ talem effe debere, vt cotangens complementi ad duos rectos aequetur arcui ipfi refpondens $s' = \frac{1,1980}{\sqrt{\text{fin.}\,\Phi}} - s$. Cum igitur fit

Pro angulo 135° arcus $s' = 1,155$ et $\text{cot.}\,\Phi = 1,000$

Pro angulo 150° arcus $s' = 1,517$ et $\text{cot.}\,\Phi = 1,732$

manifeftum eft, angulum quaefitum Φ intra limites 135° et 150° cadere debere. Sumatur igitur $\Phi = 142^\circ, 30'$, eritque $s = 0,2227$ et $s' = 1,313$ et $\text{cot.}(\pi - \Phi) = 1,303$, nimis parua, ideoque angulus Φ nimis paruus. Sit ergo $\Phi = 143^\circ$, eritque arcus angulo $\pi - \Phi$ refpondens $s = 0,2196$ et $s' = 1,325$. Eft vero $\text{cot.}(\pi - \Phi) = 1,327$, nimis magna quantitate $0,002$. Iam fiat $1,325 - 1,313$ ad $30'$ vt $0,002$ ad n', fiue $0,012 : 30' = 0,002 : n'$, vnde fit $n = 5'$, quibus a $\Phi = 143^\circ$ fubtractis remanet $\Phi = 142^\circ, 55'$, cui angulo refpondet arcus $s' = 1,323$, exiftente

$$\text{cot.}(\pi - \Phi) = 1,323 = s',$$

vti requiritur. Inuenta igitur amplitudine arcus in puncto C, fcilicet B V C $= \Phi = 142^\circ, 55'$, erit angulus

$$A\,V\,C = \pi - \Phi = 37^\circ, 5',$$

Tab. II. Fig. 1.

ideoque

$$A\,C\,V = 90^\circ - A\,V\,C = 52^\circ, 55';$$

et quia recta C V curuam in C tangit, erit etiam angulus A C I $=$ A C V $= 52^\circ, 55'$, ideoque angulus, quo ambo

bo curuae rami in C ad se inuicem inclinantur, scilicet A I C i A $=$ 105°, 50′. Denique descripto centro C, radio C A $=$ 1, arcu circuli A H, manifestum est rectam A V esse tangentem anguli A C V, siue cotangentem anguli A V C, quam inuenimus $= 1,323 =$ arcui $s' =$ A I C. Erit igitur longitudo arcus lemniscati

Tab. I. Fig. 6.

$$\text{A I C } i \text{ A} = 2 \text{ A V} = \text{V } v = 2,646,$$

et area trianguli

$$\text{V C } v = \tfrac{1}{2} \text{V } v = \text{cot. A V C} = \text{arc. A I C}.$$

§. 20. Via maxime naturalis, ad Solutionem Problematis hic tractati perueniendi, videtur esse introductio anguli A C T $= \zeta$ et distantiae puncti Y a puncto fixo C, scilicet C Y $= z$; hancque viam iam supra §. 5. tentauimus, vbi ad aequationem inter variabiles ζ et z peruenimus, quae erat $\frac{d\zeta}{\cos. \zeta^2} = \sqrt{(dz^2 + zz\,d\zeta^2)}$, cuius resolutionem dubito an quisquam esset reperturus, nisi Solutio iam aliunde constaret. Sequenti autem modo comperi aequationem illam integrari et ad Solutionem supra datam perduci posse.

Fig. 3.

Resolutio aequationis
$\frac{d\zeta}{\cos. \zeta^2} = \sqrt{(dz^2 + zz\,d\zeta^2)}$.

§. 21. Primo ad tollendam irrationalitatem statuatur $dz = -z\,d\zeta$ tang. θ, et aequatio proposita hanc induet formam radicis immunem: $\frac{1}{\cos. \zeta^2} = \frac{z}{\cos. \theta}$, ex qua deducitur distantia C Y, cum sit C Y $= z = \frac{\cos. \theta}{\cos. \zeta^2}$. Iam sumantur logarithmi, eritque $l\,z = l \cos. \theta - 2\,l \cos. \zeta$, vnde differentiando fit

$$\frac{dz}{z} = \frac{2\,d\zeta \sin. \zeta}{\cos. \zeta} - \frac{d\theta \sin. \theta}{\cos. \theta}.$$

Est

Eſt vero ex poſitione initio facta $\frac{dz}{z} = - d\zeta$ tang. θ, quo ſubſtituto haec habebitur aequatio inter angulos ζ et θ:

$$(d\theta - d\zeta) \text{ tang. } \theta = 2 d\zeta \text{ tang. } \zeta,$$

quae, etſi duas tantum variabiles complectitur, tamen conſuetis methodis nullo modo tractari poſſe videtur. At ope ſequentis artificii negotium confici poterit.

§. 22. Ponatur ſumma angulorum $\zeta + \theta = \Phi$, cuius quidem poſitionis ratio haud perſpicitur: eam autem infra aſſignabimus. Erit igitur $d\theta - d\zeta = d\Phi - 2 d\zeta$ et tang. θ = tang. $(\Phi - \zeta)$, vnde aequatio fiet

$$(d\Phi - 2 d\zeta) \text{ tang. } (\Phi - \zeta) = 2 d\zeta \text{ tang. } \zeta,$$

quae ita repraeſentetur

$$2 d\zeta (\text{tang. } \zeta + \text{tang. } (\Phi - \zeta)) = d\Phi \text{ tang. } (\Phi - \zeta),$$

vel ita:

$$\frac{2 d\zeta \text{ ſin. } (\zeta + (\Phi - \zeta))}{\text{coſ. } \zeta \text{ coſ. } (\Phi - \zeta)} = d\Phi \text{ tang. } (\Phi - \zeta),$$

quae, multiplicata per coſ. $(\Phi - \zeta)$, reducitur ad hanc concinniorem:

$$\frac{2 d\zeta \text{ ſin. } \Phi}{\text{coſ. } \zeta} = d\Phi \text{ ſin. } (\Phi - \zeta) = d\Phi \text{ ſin. } \Phi \text{ coſ. } \zeta$$
$$- d\Phi \text{ coſ. } \Phi \text{ ſin. } \zeta,$$

vnde diuidendo per coſ. ζ naſcitur iſta aequatio:

$$\frac{2 d\zeta}{\text{coſ. } \zeta^2} \text{ ſin. } \Phi = d\Phi \text{ ſin. } \Phi - d\Phi \text{ tang. } \zeta \text{ coſ. } \Phi.$$

Eſt vero A T = A Y, hoc eſt tang. $\zeta = s$, ideoque $\frac{d\zeta}{\text{coſ. } \zeta^2} = ds$, vnde fit

$$2 ds \text{ ſin. } \Phi = d\Phi \text{ ſin. } \Phi - s d\Phi \text{ coſ. } \Phi,$$

quae aequatio, per $\sqrt{}$ ſin. Φ diuiſa, ita repraeſentetur:

$$2 ds \sqrt{\text{ſin. } \Phi} + \frac{s d\Phi \text{ coſ. } \Phi}{\sqrt{\text{ſin. } \Phi}} = d\Phi \sqrt{\text{ſin. } \Phi},$$

 cu-

cuius integrale eſt

$$2\,s\,\sqrt{\text{ſin.}\,\Phi} = C + \int d\Phi \sqrt{\text{ſin.}\,\Phi},$$

vnde colligitur

$$s = \frac{C + \int d\Phi \sqrt{\text{ſin.}\,\Phi}}{2\sqrt{\text{ſin.}\,\Phi}} = \frac{1}{2\sqrt{\text{ſin.}\,\Phi}} \int d\Phi \sqrt{\text{ſin.}\,\Phi},$$

vti ſupra erat inuentum.

§. 23. Supereſt vt rationem poſitionum modo adhibitarum: $\theta + \zeta = \Phi$ et $dz = -z\,d\zeta$ tang. θ, quibus aequationem propoſitam $\frac{d\zeta}{\text{coſ.}\,\zeta^2} = \sqrt{(dz^2 + zz\,d\zeta^2)}$ reſoluere licuit, inueſtigemus. Hunc in finem per puncta curuae proxima Y et y ducatur tangens y Y T, voceturque, vt ſupra §. 6. fecimus, angulus T V Y $= \Phi$. Tum, ductis applicatis Y X et yx proximis, ſi ex Y in yx et ex y in C T perpendicula demittantur Yw et yu, ſe mutuo in o decuſſantia, voceturque angulus Y$yu = \theta$, erit $\Phi = \theta + wyu$. At vero ob angulos You et yow aequales, etiam aequales erunt anguli wyu et wYu. Eſt autem wYu = A C T $= \zeta$, ergo $\Phi = \theta + \zeta$. Deinde eſt tang. $\theta = \frac{Yu}{yu}$, vnde ob Y$u = -dz$ et $yu = z\,d\zeta$ erit tang. $\theta = -\frac{dz}{z\,d\zeta}$, ſiue $dz = -z\,d\zeta$ tang. θ. Hoc igitur modo poſitionum, quibus modo ante, inſtar artificiorum analyticorum, vſi ſumus, ratio geometrice eſt aſſignata. Nunc autem Solutio Problematis facillime immediate ex coordinatis C X $= x$ et X Y $= y$ deduci poteſt ſequenti modo.

Solutio facillima.

§. 24. Cum ſit A T $= \frac{y}{x} = s$, per conditionem Problematis, erit $y = xs$, ergo $dy = x\,ds + s\,dx$. Eſt vero $dx = Yw = ds\,\text{ſin.}\,\Phi$ et $dy = yw = ds\,\text{coſ.}\,\Phi$, quibus

ſub-

ſubſtitutis aequatio differentialis euadit

$$d s \cos. \Phi = x d s + s d s \sin. \Phi,$$

vnde deducitur abſciſſa $x = \cos. \Phi - s \sin. \Phi$ et applicata reſpondens $y = x s = s \cos. \Phi - s s \sin. \Phi$. Arcus autem s per angulum Φ ita definitur vt ſit, vti ſupra inueni

$$s = \frac{1}{2\sqrt{\sin. \Phi}} \int d \Phi \sqrt{\sin. \Phi}.$$

Nam ſi differentietur aequatio $x = \cos. \Phi - s \sin. \Phi$, ob $d x = d s \sin \Phi$ prodit

$$2 d s \sin. \Phi = - d \Phi \sin. \Phi - s d \Phi \cos. \Phi,$$

ſiue erit

$$2 d s \sqrt{\sin. \Phi} + \frac{s d \Phi \cos. \Phi}{\sqrt{\sin. \Phi}} = \pm d \Phi \sqrt{\sin. \Phi},$$

cuius aequationis integrale eſt $2 s \sqrt{\sin. \Phi} = \int d \Phi \sqrt{\sin. \Phi}$ vnde fit $s = \frac{1}{2\sqrt{\sin. \Phi}} \int d \Phi \sqrt{\sin. \Phi}$, vt ſupra.

SOLVTIO PROBLEMATIS GEOMETRICI, IN ACTIS ACADEMIAE SCIENTIARVM BEROLINENSIS, PRO ANNO 1776, A CELEB. *CASTILLON* PROPOSITI.

Auctore

A. J. LEXELL.

§. 1.

Cum Illuſtris *Eulerus* de hoc Problemate ſermonem iniiciens, dixiſſet ſe dubitare, vtrum iſta ſolutio Analytica Illuſtris *de la Grange*, quam in Volumine Actorum Berolinenſium citato, recenſuit Celeb. *Caſtillon*, ad aliquam expeditam et concinnam conſtructionem Geometricam perducat, id quidem me permouit vt disquirerem vtrum eiusmodi conſtructio inde deriuari poſſet, nec ne? Quum igitur mihi ſucceſſerit conſtructionem haud complicatam ex iſta ſolutione elicere, vti et aliam ſolutionem Analyticam pro hoc Problemate adferre; quae de iſtis ſolutionibus meditatus ſum, nec non alias quasdam disquiſitiones ad hoc Problema ſpectantes Geometris non ingratas fore confido, etiamſi iſtae ſolutiones quas propoſiturus ſum, elegantia et ſim-

ſimplicitate multum concedant illis Geometricis conſtructionibus, quas Celeb. Mathematici *Caſtillon, Eulerus* et *Fuſs* propoſuerunt.

§. 2. Dum igitur proponitur iſtud Problema: *In circulo MON magnitudine et poſitione dato inſcribere triangulum MON, cuius tria latera ſi opus ſit producta, per tria data puncta A, B, D tranſeant*; ſolutio Analytica ſequenti ratione ad imitationem Illuſtris *de la Grange* inſtitui poteſt. Concipiantur a punctis datis A, B, D, ad centrum circuli dati C, ductas lineas rectas AB, BC, DC, et ductis radiis circuli CM, CN, CO, exprimantur anguli ACM, ACN, ACO reſpectiue per x, y, z; anguli vero ACB, ACD per m, n et lineae AC, BC, DC per a, b, c; tumque erit

Tab. II. Fig. 3.

$$BCO = z - m;\ BCN = y - m;$$

$$DCM = n - x;\ DCO = n - z.$$

In triangulo igitur BCN, habebimus

$$\text{ang. } CNB = 90^\circ - \tfrac{1}{2}(BCN - BCO) \text{ et}$$

$$\text{ang. } CBN = 90^\circ - \tfrac{1}{2}(BCN + BCO);$$

ideoque

$$\text{ſin. } CNB = \text{coſ.}\, \tfrac{1}{2}(y - z) \text{ et}$$

$$\text{ſin. } CBN = \text{coſ.}\, (\tfrac{1}{2}(z + y) - m).$$

Quum igitur ſit:

$$BC : CN = \text{ſin. } CNB : \text{ſin. } CBN,$$

fiet poſito valore radii pro circulo dato $= 1$;

$$b : 1 = \text{coſ.}\, \tfrac{1}{2}(y - z) : \text{coſ.}\, (\tfrac{1}{2}(z + y) - m).$$

Simili prorſus ratiocinio pro triangulo DCM conſequemur:

$$c : 1 = \text{coſ.}\, \tfrac{1}{2}(z - x) : \text{coſ.}\, (\tfrac{1}{2}(z + x) - n).$$

Ex

Ex priori harum aequationum colligitur:

$$\cot.\tfrac{1}{2}z = \frac{b\sin.(\tfrac{1}{2}y - m) + \sin.\tfrac{1}{2}y}{\cos.\tfrac{1}{2}y - b\cos.(\tfrac{1}{2}y - m)}$$

et ex poſteriori

$$\cot.\tfrac{1}{2}z = \frac{c\sin.(\tfrac{1}{2}x - n) + \sin.\tfrac{1}{2}x}{\cos.\tfrac{1}{2}x - c\cos.(\tfrac{1}{2}x - n)};$$

his igitur valoribus inter ſe aequatis, prodit iſta analogia:

$$b\sin.(\tfrac{1}{2}y - m) + \sin.\tfrac{1}{2}y : \cos.\tfrac{1}{2}y - b\cos.(\tfrac{1}{2}y - m)$$
$$= c\sin.(\tfrac{1}{2}x - n) + \sin.\tfrac{1}{2}x : \cos.\tfrac{1}{2}x - c\cos.(\tfrac{1}{2}x - n),$$

quae in hanc euoluitur:

$$\sin.\tfrac{1}{2}y(1 + b\cos.m) - b\sin.m\cos.\tfrac{1}{2}y : \cos.\tfrac{1}{2}y(1 - b\cos.m) - b\sin.m\sin.\tfrac{1}{2}y =$$
$$\sin.\tfrac{1}{2}x(1 + c\cos.n) - c\sin.n\cos.\tfrac{1}{2}x : \cos.\tfrac{1}{2}x(1 - c\cos.n) - c\sin.n\sin.\tfrac{1}{2}y.$$

§. 3. Tum vero in triangulo ACN, ob

$$CNA = 90 - \tfrac{1}{2}(y - x) \text{ et } CAN = 90 - \tfrac{1}{2}(y + x),$$

atque

$$AC : AN = \sin.CNA : \sin.CAN, \text{ fiet}$$
$$a : 1 = \cos.\tfrac{1}{2}(y - x) : \cos.\tfrac{1}{2}(y + x), \text{ hincque}$$
$$a - 1 : a + 1 = \cos.\tfrac{1}{2}(y - x) - \cos.\tfrac{1}{2}(y + x) : \cos.\tfrac{1}{2}(y - x) + \cos.\tfrac{1}{2}(y + x);$$

vnde colligitur $\frac{a-1}{a+1} = \operatorname{tang}.\tfrac{1}{2}y\operatorname{tang}.\tfrac{1}{2}x$, vbi quidem compendii gratia pro $\frac{a-1}{a+1}$, ε ſcribere licebit. Diuiſis binis prioribus membris analogiae ſupra allatae per $b\sin.m\cos.\tfrac{1}{2}y$, et binis poſterioribus per $c\sin.m\cos.\tfrac{1}{2}x$; hanc conſequemur analogiam:

Tang.

$$\text{tang.}\tfrac{1}{2}y\,\frac{(1+b\,\text{cos}.m)}{b\,\text{sin}.m}-1:\frac{1-b\,\text{cos}.m}{b\,\text{sin}.m}-\text{tang.}\tfrac{1}{2}y=$$
$$\text{tang.}\tfrac{1}{2}x\,\frac{(1+c\,\text{cos}.n)}{c\,\text{sin}.n}-1:\frac{1-c\,\text{cos}.n}{c\,\text{sin}.n}-\text{tang.}\tfrac{1}{2}x.$$

Ex qua ſi cum aequatione $\text{tang.}\tfrac{1}{2}y.\ \text{tang.}\tfrac{1}{2}x=\varepsilon$, combinetur, facile liquet aequationem quadraticam ſiue pro $\text{tang.}\tfrac{1}{2}y$, ſeu pro $\text{tang.}\tfrac{1}{2}x$ emergere. Caeterum per multiplicationem ex analogia propoſita ſequens prodit aequatio:

$$\text{tang.}\tfrac{1}{2}y\,\frac{(1+b\,\text{cos}.m)(1-c\,\text{cos}.n)}{b\,c\,\text{sin}.m\,\text{sin}.n}-\varepsilon\frac{(1+b\,\text{cos}.m)}{b\,\text{sin}.m}-\frac{(1-c\,\text{cos}.n)}{c\,\text{sin}.n}+\text{tang.}\tfrac{1}{2}x=$$
$$\text{tang.}\tfrac{1}{2}x\,\frac{(1+c\,\text{cos}.n)(1-b\,\text{cos}.m)}{b\,c\,\text{sin}.m\,\text{sin}.n}-\varepsilon\frac{(1+c\,\text{cos}.n)}{c\,\text{sin}.n}-\frac{(1-b\,\text{cos}.m)}{b\,\text{sin}.m}+\text{tang.}\tfrac{1}{2}y.$$

§. 4. Quia coefficientes quibus $\text{tang.}\tfrac{1}{2}y$, $\text{tang.}\tfrac{1}{2}x$ in hac aequatione adficiuntur ſunt valde perplexi, diſpiciendum mihi eſſe exiſtimaui, an pro his rationibus: Tab. II. Fig. 4.

$$\frac{(1+b\,\text{cos}.m)(1-c\,\text{cos}.n)}{b\,c\,\text{sin}.m\,\text{sin}.n}-1:\frac{1-c\,\text{cos}.n}{c\,\text{sin}.n}-\frac{(1-b\,\text{cos}.m)}{b\,\text{sin}.m}\ \text{et}$$
$$\frac{(1+c\,\text{cos}.n)(1-b\,\text{cos}.m)}{b\,c\,\text{sin}.m\,\text{sin}.n}-1:\frac{1-b\,\text{cos}.m}{b\,\text{sin}.m}-\frac{(1-c\,\text{cos}.n)}{c\,\text{sin}.n},$$

expreſſiones quaedam ſimplices ex natura quaeſtionis deriuandae ſubſtitui ſe paterentur. Si igitur punctum A in ipſa Peripheria ſitum ponatur, atque ideo ſiue $\text{tang.}\tfrac{1}{2}x$ ſeu $\text{tang.}\tfrac{1}{2}y$ nihilo aequalis ſtatui poſſit; ſi ponatur $\text{tang.}\tfrac{1}{2}x=0$, fiet

$$\text{tang.}\tfrac{1}{2}y=\frac{1-c\,\text{cos}.n}{c\,\text{sin}.n}-\frac{(1-b\,\text{cos}.m)}{b\,\text{sin}.m}:\frac{(1+b\,\text{cos}.m)(1-c\,\text{cos}.n)}{b\,c\,\text{sin}.m\,\text{sin}.n}-1.$$

Pro iſto autem caſu, ſi per punctum P quod nunc cum A coincidit, ducatur linea recta P D circulum in O ſecans, atque ducatur linea B O N circulo denuo occurrens in N, ſi iungatur C N, facile patebit fore $PCN=y$. Caeterum quod reapſe ſit:

$$\text{tang.}\tfrac{1}{2}PCN=\frac{1-c\,\text{cos}.n}{c\,\text{sin}.n}-\frac{(1-b\,\text{cos}.m)}{b\,\text{sin}.m}:\frac{(1+b\,\text{cos}.m)(1-c\,\text{cos}.n)}{b\,c\,\text{sin}.m\,\text{sin}.n}-1,$$

ſequenti ratiocinio Geometrico confirmatur.

§. 5. Ducantur ad puncta P, Q in quibus Diameter circulo occurrit, lineae rectae BP, BQ, et habebimus:

$$\frac{1 - \cos. n}{c \sin. n} = \cot. DPC;\ \frac{1 - b \cos. m}{b \sin. m} = \cot. BPC \text{ et}$$

$$\frac{1 + b \cos. m}{b \sin. m} = \cot. BQC,$$

hinc ista fractio:

$$\frac{1 - c \cos. n}{c \sin. n} - \frac{(1 - b \cos. m)}{b \sin. m} : \frac{(1 + b \cos. n)(1 - c \cos. n)}{bc \sin. m \sin. n} - 1,$$

ita Geometrice exprimetur:

$$\cot. DPC - \cot. BPC : \cot. BQC. \cot. DPC - 1;$$

siue ob

$$\cot. DPC - \cot. BPC = \frac{\sin. (BPC - DPC)}{\sin. BPC. \sin. DPC} = \frac{\sin. DPB}{\sin. BPC. \sin. DPC} \text{ et}$$

$$\cot. BQC. \cot. DPC - 1 = \frac{\cos. (DPC + BQC)}{\sin. BQC. \sin. DPC},$$

hinc erit ista fractio proposita quoque

$$= \frac{\sin. DPB. \sin. BQC}{\sin. BPC. \cos. (DPC + BQC)}.$$

Si ducta concipiatur QO, quia est

$$QOB = 90 + POB \text{ et } BQO = 90 - DPC - BQC,$$

consequemur ex triangulo QOB:

$$BQ : OB = \sin. QOB : \sin. BQO = \cos. BOP : \cos. (DPC + BQC),$$

tum vero quum sit:

$$PB : BQ = \sin. BQC : \sin. BPC \text{ et}$$

$$OB : BP = \sin. DPB : \sin. POB,$$

fiet componendo has rationes:

$$\cos. POB. \sin. BQC. \sin. DPB$$

$$= \sin. POB. \sin. BPC. \cos. (DPC + BQC),$$

ideoque

$$\text{tang. } POB = \frac{\sin. BQC. \sin. BPD}{\sin. BPC \cos. (DPC + BQC)};$$

 atqui

atqui eſt

$$\text{tang.}\ \tfrac{1}{2}\ PCN = \text{tang.}\ POB,$$

hincque colligitur

$$\text{tang.}\ \tfrac{1}{2}\ PCN = \frac{\text{ſin.}\ BQC.\ \text{ſin.}\ BPD}{\text{ſin.}\ BPC.\ \text{coſ.}\ (DPC + BQC)},$$

ſiue

$$\text{tang.}\ \tfrac{1}{2}\ PCN = \text{tang.}\ \mu = \frac{1 - c\ \text{coſ.}\ n}{c\ \text{ſin.}\ n} - \frac{(1 - b\ \text{coſ.}\ m)}{b\ \text{ſin.}\ m} : \frac{(1 - c\ \text{coſ.}\ n)(1 + b\ \text{coſ.}\ m)}{b\ c\ \text{ſin.}\ m\ \text{ſin.}\ n} - 1.$$

§. 6. Iuncta iterum PB, ſupponamus eam occurrere circulo in puncto S et ducta recta DS quae denuo circulo occurrit in puncto R, ſi iungatur CR, dico fore:

$$\text{tang.}\ \tfrac{1}{2}\ PCR = \frac{1 - b\ \text{coſ.}\ m}{b\ \text{ſin.}\ m} - \frac{(1 - c\ \text{coſ.}\ n)}{c\ \text{ſin.}\ n} : \frac{(1 + c\ \text{coſ.}\ n)(1 - b\ \text{coſ.}\ m)}{b\ c\ \text{ſin.}\ m\ \text{ſin.}\ n} - 1.$$

Nam ducta DQ eſt

$$\frac{1 - b\ \text{coſ.}\ m}{b\ \text{ſin.}\ m} = \text{cot.}\ BPC;\quad \frac{1 - c\ \text{coſ.}\ n}{c\ \text{ſin.}\ n} = \text{cot.}\ DPC;$$

$$\frac{1 + c\ \text{coſ.}\ n}{c\ \text{ſin.}\ n} = \text{cot.}\ DQC;$$

hincque ratio propoſita in ſequentem abit:

$$\text{cot.}\ BPC - \text{cot.}\ DPC : \text{cot.}\ DQC\ \text{cot.}\ BPC - 1$$

et per reductiones ſimiles ſupra propoſitis in hanc:

$$- \frac{\text{ſin.}\ DPB\ \text{ſin.}\ DQC}{\text{ſin.}\ DPC\ \text{coſ.}\ (DQC + BPC)}.$$

Ducta nunc QS fiet

$$QSD = 90 - DSB;\ SQD = PQD - PQS = BPC + PQD - 90;$$

vnde ex triangulo DQS:

$$DQ \cdot DS = \text{ſin.}\ QSD : \text{ſin.}\ SQD = \text{coſ.}\ DSB : -\text{coſ.}\ (DQC + BPC);$$

porro ex triangulis DQP; DPS fiet:

$$DP : DQ = \text{ſin.}\ DQC : \text{ſin.}\ DPC;$$

$$DS : DP = \text{ſin.}\ DPB : \text{ſin.}\ DSB.$$

Componendo igitur iſtas rationes conſequemur:

$$\text{coſ. } DSB \cdot \text{ſin. } DQC \text{ ſin. } DPB = - \text{ſin. } DSB \text{ ſin. } DPC \cdot \text{coſ. } (DQC + BPC),$$

hinc

$$\text{tang } DSB = - \frac{\text{ſin. } DPB \cdot \text{ſin. } DQC}{\text{ſin. } DPC \cdot \text{coſ. } (DQC + BPC)}.$$

Atqui eſt tang. $DSB =$ tang. $\frac{1}{2} PCR$; ideoque

$$\text{tang. } \nu = \text{tang. } \tfrac{1}{2} PCR$$

aequalis iſtae rationi

$$\frac{1 - b \text{ coſ. } m}{b \text{ ſin. } m} - \frac{(1 - c \text{ coſ. } n)}{c \text{ ſin. } n} : \frac{(1 + c \text{ coſ. } n)(1 - b \text{ coſ. } m)}{b c \text{ ſin. } m \text{ ſin. } n} - 1.$$

Tab. II. Fig. 5

§. 7. Id denique nunc reſtat vt diſpiciamus an non haec expreſſio:

$$\frac{1 + b \text{ coſ. } m}{b \text{ ſin. } m} - \frac{(1 + c \text{ coſ. } n)}{c \text{ ſin. } n} : \frac{1 - c \text{ coſ. } n}{c \text{ ſin. } n} - \frac{(1 - b \text{ coſ. } m)}{b \text{ ſin. } m} =$$

$$c \text{ ſin. } n - b \text{ ſin. } m + b c \text{ ſin. } (n - m) : b \text{ ſin. } m - c \text{ ſin. } n + b c \text{ ſin. } (n - m),$$

concinne exprimi queat. Atque ductis lineis rectis BC, DC facile liquet eſſe ob radium circuli

$$PC = QC = 1, \quad 2 \triangle BCP = 2 \triangle BCQ = b \text{ ſin. } m;$$

$$2 \triangle DPC = 2 \triangle DCQ = c \text{ ſin. } n \text{ et}$$

$$2 \triangle BCD = b c \text{ ſin. } (n - m);$$

inde autem prodit

$$c \text{ ſin. } n - b \text{ ſin. } m + b c \text{ ſin. } (n - m) = 2 \triangle DCQ - 2 \triangle BCQ + 2 \triangle BCD = 2 \triangle BQD;$$

nec non

$$b \text{ ſin. } m - c \text{ ſin. } n + b c \text{ ſin. } (n - m) = 2 \triangle BCP - 2 \triangle DCP + 2 \triangle BCD = 2 \triangle BPD,$$

hincque:

c ſin. n

$$c \sin. n - b \sin. m + b c \sin. (n - m) : b \sin. m - c \sin. n + b c \sin. (n - m) = \Delta BQD : \Delta BPD.$$

Quod ſi nunc linea B D concipiatur producta vsque dum Diametro P Q in T occurrat, facile perſpicitur fore

$$\Delta BQD : \Delta BPD = TQ : TP = a' + 1 : a' - 1;$$

poſita linea C T $= a'$. His igitur valoribus introductis in aequatione noſtra Artic. 3 propoſita, illa ſequentem ſatis concinnam adipiſcetur formam:

$$\text{tang.} \tfrac{1}{2} y \cot. \mu + \text{tang.} \tfrac{1}{2} x \cot. \nu = 1 + \varepsilon \tfrac{(a' + 1)}{a' - 1};$$

ex qua cnm iſta $\text{tang.} \frac{1}{2} x \, \text{tang.} \frac{1}{2} y = \varepsilon$, combinata, nunc valores ipſorum x, y elici poſſent.

§. 8. Multiplicata aequatione noſtra per $\text{tang.} \frac{1}{2} y$, ſi breuitatis gratia ponamus $1 + \varepsilon \frac{(a' + 1)}{a' - 1} = 2\lambda$; conſequemur:

$$\cot. \mu \, \text{tang.} \tfrac{1}{2} y^2 - 2 \lambda \, \text{tang.} \tfrac{1}{2} y = \varepsilon \cot. \nu;$$

vnde colligitur:

$$\text{tang.} \tfrac{1}{2} y = \text{tang.} \mu \, (\lambda \pm \sqrt{(\lambda^2 - \varepsilon \cot. \mu \cot. \nu)}).$$

Priori valore pro $\text{tang.} \frac{1}{2} y$ accepto, ponatur

$$\text{tang.} \tfrac{1}{2} y' = \text{tang.} \mu \, (\lambda - \sqrt{(\lambda^2 - \varepsilon \cot. \mu \cot. \nu)});$$

hinc fiet

$$\text{tang.} \tfrac{1}{2}(y' + y) = \frac{\text{tang.} \frac{1}{2} y + \text{tang.} \frac{1}{2} y'}{1 - \text{tang.} \frac{1}{2} y \, \text{tang.} \frac{1}{2} y'} = \frac{2 \lambda \, \text{tang.} \mu}{1 - \varepsilon \, \text{tang.} \mu \cot. \nu};$$

in qua expreſſione nullae quantitates irrationales occurrunt. Iam ſtatuamus

$$\varepsilon \cot. \nu = \text{tang.} \pi; \; \tfrac{a' - 1}{a' + 1} . \cot. \nu = \varepsilon' \cot. \nu = \text{tang.} \pi';$$

fiet

$$2 \lambda = 1 + \tfrac{\varepsilon}{\varepsilon'} = 1 + \text{tang.} \pi \cot. \pi' = \tfrac{\sin. (\pi + \pi')}{\cos. \pi \sin. \pi'}$$

 et

et tum pro $\text{tang.} \frac{1}{2}(y' + y)$ hanc obtinebimus expressionem:

$$\text{tang.} \frac{1}{2}(y' + y) = \frac{2\lambda \, \text{tang.} \, \mu}{1 - \text{tang.} \, \mu \, \text{tang.} \, \pi} = \frac{2\lambda \cos. \pi \sin. \mu}{\cos. (\mu + \pi)} = \frac{\sin. \mu \sin. (\pi + \pi')}{\sin. \pi' \cos. (\mu + \pi)}.$$

Tab. III. Fig. 1. 2.

§. 9. Ductis igitur lineis A R, T R, quae circulo denuo in punctis V et N' occurrant, patet esse

$$\text{tang.} \tfrac{1}{2} ACV : \text{tang.} \tfrac{1}{2} ACR = a - 1 : a + 1$$

seu

$$\text{tang.} \tfrac{1}{2} ACV = \frac{a-1}{a+1} \cot. \nu = \varepsilon \cot. \nu = \text{tang.} \, \pi,$$

vnde $\pi = \frac{1}{2} ACV$; tumque

$$\text{tang.} \tfrac{1}{2} TCN' : \text{tang.} \tfrac{1}{2} TCR = a' - 1 : a' + 1;$$

id est

$$\text{tang.} \tfrac{1}{2} TCN' = \frac{a'-1}{a'+1} \cot. \nu = \text{tang.} \, \pi';$$

vnde $\pi' = \frac{1}{2} TCN'$. Hinc fiet

$$\text{tang.} \tfrac{1}{2}(y + y') = \frac{\sin \frac{1}{2} ACN \sin. \frac{1}{2}(ACV + ACN')}{\sin. \frac{1}{2} ACN' \cos. \frac{1}{2}(ACN + ACV)},$$

vnde constructio est manifesta, nam bisectis arcubus V N', V N in punctis Z, U, fiet

$$\text{tang.} \tfrac{1}{2}(y + y') = \frac{\sin. \frac{1}{2} PCN \, . \, \sin. PCZ}{\sin. \frac{1}{2} PCN' \, \cos. PCU}.$$

Hinc si ex punctis Z, U in Diametrum P Q ducantur perpendiculares U L, Z Y, fiet

$$\sin. PCZ = ZY; \ \cos. PCU = CL \text{ et}$$

$$\sin. \tfrac{1}{2} PCN : \sin. \tfrac{1}{2} PCN' = PN : PN';$$

ideoque erit

$$\text{tang.} \tfrac{1}{2}(y' + y) = \frac{PN \, ZY}{PN' . CL}.$$

§. 10.

§. 10. Ex his igitur manifeftum eft pro tang. $\frac{1}{2}(y+y')$ eruendo, fequentem adhibendam effe conftructionem. Occurrat recta A C circulo in punctis P, Q, tumque ex P ducantur ad B, D, rectae P B, P D quae circulum in S, O fecant, et per haec puncta ducantur rectae D S, B O circulo denuo in punctis R, N occurrentes, denique iungantur C R, C N, P R, P N. Porro producatur B D vsque dum rectae P Q in T occurrat, et ex punctis A, T ad R ducantur rectae A R, T R, circulum denuo in V et N' fecantes. Deinceps bifcecentur arcus V N', V N in punctis Z et U et demiffis in diametrum P Q perpendicularibus Z Y, U L, erit tang. $\frac{1}{2}(y'+y) = \frac{PN \cdot YZ}{PN' \cdot CL}$.

§. 11. Inuento autem angulo $y+y'$, finguli y, y', facile inuenientur, quum fit

$$\text{tang.}\,\tfrac{1}{2}y\ \text{tang.}\,\tfrac{1}{2}y' = \text{tang.}\,\mu\ \text{tang.}\,\pi;$$

hinc enim fiet:

$$\text{cof.}\tfrac{1}{2}y\,\text{cof.}\tfrac{1}{2}y' + \text{fin.}\tfrac{1}{2}y\ \text{fin.}\tfrac{1}{2}y' : \text{cof.}\tfrac{1}{2}y\,\text{cof.}\tfrac{1}{2}y' - \text{fin.}\tfrac{1}{2}y\,\text{fin.}\tfrac{1}{2}y'$$
$$= \text{cof.}\,\mu\,\text{cof.}\,\pi + \text{fin.}\,\mu\,\text{fin.}\,\pi : \text{cof.}\,\mu\,\text{cof.}\,\pi - \text{fin.}\,\mu\,\text{fin.}\,\pi,$$

id eft

$$\text{cof.}\tfrac{1}{2}(y-y') : \text{cof.}\tfrac{1}{2}(y+y') = \text{cof.}(\mu-\pi) : \text{cof.}\,\mu+\pi) :$$

Tab. III. Fig. 3.

quae analogia pro cof. $\frac{1}{2}(y-y')$ concinnam fuppeditat conftructionem. Iungantur puncta N, V in peripheria circuli et producatur recta N V vsque dum diametro P Q in K occurrat, deinde capto angulo C K L $= 90 - \frac{1}{2}(y+y')$, occurrat recta K L circulo in punctis L, L', dico fore $y =$ K C L; $y' =$ K C L'. Tumque fi ifta puncta L, L' cum puncto A iungantur rectis A L, A L', quae circulo denuo in punctis M, M' occurrant, anguli K C M, K C M' dabunt

dabunt valores ipsorum x, x'. Nam ob angulum $KCN = 2\mu$; $KCV = 2\pi$ fiet

$$2(\mu - \pi) = KCN - KCV = VCN \text{ et}$$
$$2(\mu + \pi) = KCN + KCV; \text{ vnde}$$
$$\cos.(\mu - \pi) : \cos.(\mu + \pi) = \sin.CNK : \sin.CKN$$
$$= CK : CN = \sin.CLK : \sin.CKL$$
$$= \cos.\tfrac{1}{2}(KCL - KCL') : \cos.\tfrac{1}{2}(KCL + KCL').$$

Hincque

$$\cos.\tfrac{1}{2}(y - y') : \cos.(y + y')$$
$$= \cos.\tfrac{1}{2}(KCL - KCL') : \cos.\tfrac{1}{2}(KCL + KCL'),$$

ideoque ob angulum $90 - \frac{1}{2}(y + y') = CKL$, fiet necessum est

$$\tfrac{1}{2}(KCL + KCL') = \tfrac{1}{2}(y + y') \text{ et } \tfrac{1}{2}(KCL - KCL) = \tfrac{1}{2}(y - y'),$$

hinc $KCL = y$; $KCL' = y'$; et denique ob

$$\text{tang.}\tfrac{1}{2}x \text{ tang.}\tfrac{1}{2}y = \frac{AP}{AQ} = \frac{AC - CL}{AC + CL}, \text{ erit}$$
$$\cos.\tfrac{1}{2}(y - x) : \cos.\tfrac{1}{2}(y + x) = AL : CL$$
$$= \cos.\tfrac{1}{2}(ACL - ACM) : \cos.\tfrac{1}{2}(ACL + ACM),$$

hinc $ACM = x$, similique ratione euincitur fore $ACM' = x'$. Caeterum heic obseruari meretur, casu quo recta BD producta per punctum A transit, fieri $\frac{a' - 1}{a' + 1} = \frac{a - 1}{a + 1}$; ideoque $\varepsilon' = \varepsilon$ et $2\lambda = 2$, hinc pro illo casu

$$\text{tang.}\tfrac{1}{2}(y' + y) = \frac{2\cos.\pi \sin.\mu}{\cos.(\pi + \mu)},$$

id est

$$\text{tang.}\tfrac{1}{2}(y + y') = \frac{2\sin.\frac{1}{2}PCN \cos.\frac{1}{2}PCV}{\cos.\frac{1}{2}(PCN + PCV)} = \frac{PN.QV.}{2CL}$$

§. 12. Circa constructionem supra allatam notatu dignum occurrit, quod si ducatur recta QD, quae circulo

lo in O′ occurrat et iungatur B O′ iterum circulo occurrens in N′, puncta T, R, N′ in eadem linea recta esse, quod sequenti modo demonstratur. Si iungatur P O′, ob Tab III. Fig. 1.

$$BPO' = BPC + CQD - 90, \text{ erit}$$

$$\sin. BPO' = -\cos.(CPB + CQD);$$

at in $\Delta BPO'$ est $\sin. PO'B : \sin. BPO' = BP : BO'$ et quum sit $\sin. PO'B = \cos. BO'D$, fiet

$$\cos. BO'D : -\cos.(CPB + CQD) = BP : BO'.$$

Atqui supra Artic. 6, vidimus esse

$$\cos. DSB : -\cos.(CPB + CQD) = DQ : DS,$$

ideoque erit

$$\cos. BO'D : \cos. DSB = \tfrac{BP}{BO'} : \tfrac{DQ}{DS}.$$

Tum vero ob

$$\sin. BO'D : \sin. BQD = BQ : BO'; \text{ et}$$

$$\sin. DSB : \sin. DPB = DP : DS; \text{ erit}$$

$$\sin. BO'D : \sin. DSB = \tfrac{BQ}{BO'} . \sin. BQD : \tfrac{DP}{DS} . \sin. DPB;$$

denique $\text{tang}. BO'D : \text{tang}. DSB = \tfrac{BQ}{BP} . \sin. BQD : \tfrac{DP}{DQ} . \sin. DPB$

$$= BQ . DQ \sin. BQD : DP . BP . \sin. DPB$$

$$= \Delta BQD : \Delta BPD = a' - 1 : a' + 1.$$

Ex quo liquet puncta T, R, N′ in eadem linea recta esse sita.

§. 13. Quemadmodum in solutione modo allata, valores angulorum x, y per calculum fuerunt eliciti, ita nunc quoque operae pretium est, vt in valorem anguli z inquiramus. Regrediendo igitur ad aequationes Artic. 2 allatas, consequemur:

$$\text{tang.}\tfrac{1}{2}y = \frac{b\,\text{cof.}\,(\frac{1}{2}z - m) - \text{cof.}\,\frac{1}{2}z}{\text{fin.}\,\frac{1}{2}z + b\,\text{fin.}\,(\frac{1}{2}z - m)} \quad \text{et}$$

$$\text{tang.}\tfrac{1}{2}x = \frac{c\,\text{cof.}\,(\frac{1}{2}z - n) - \text{cof.}\,\frac{1}{2}z}{\text{fin.}\,\frac{1}{2}z + c\,\text{fin.}\,(\frac{1}{2}z - n)},$$

vnde fiet

$$\varepsilon = \text{tang.}\tfrac{1}{2}y\,\text{tang.}\tfrac{1}{2}x = \frac{(b\,\text{cof.}(\frac{1}{2}z - m) - \text{cof.}z)(c\,\text{cof.}(\frac{1}{2}z - n) - \text{cof.}\frac{1}{2}z)}{(\text{fin.}\frac{1}{2}z + b\,\text{fin.}(\frac{1}{2}z - m))(\text{fin.}\frac{1}{2}z + c\,\text{fin.}(\frac{1}{2}z - n))},$$

feu facta euolutione terminorum

$$\varepsilon(\text{fin.}\tfrac{1}{2}z(1 + b\,\text{cof.}m) - b\,\text{cof.}\tfrac{1}{2}z\,\text{fin.}m)(\text{fin.}\tfrac{1}{2}z(1 + c\,\text{cof.}n) - c\,\text{cof.}\tfrac{1}{2}z\,\text{fin.}n)$$
$$= (\text{cof.}\tfrac{1}{2}z(b\,\text{cof.}m - 1) + b\,\text{fin.}m\,\text{fin.}\tfrac{1}{2}z)(\text{cof.}\tfrac{1}{2}z(c\,\text{cof.}n - 1) + c\,\text{fin.}n\,\text{fin.}\tfrac{1}{2}z).$$

Iam pofito

$$\frac{1 + b\,\text{cof.}m}{b\,\text{fin.}m} = \text{cot.}\,CQB = \text{cot.}\,\alpha; \quad \frac{1 - b\,\text{cof.}m}{b\,\text{fin.}m} = \text{cot.}\,CPB = \text{cot.}\,\beta;$$
$$\frac{1 + c\,\text{cof.}n}{c\,\text{fin.}n} = \text{cot.}\,CQD = \text{cot.}\,\gamma; \quad \frac{1 - c\,\text{cof.}n}{c\,\text{fin.}n} = \text{cot.}\,CPD = \text{cot.}\,\delta;$$

fi aequatio noftra diuidatur per $b\,c$ fin. m fin. n, haec prodibit:

$$\varepsilon(\text{fin}\,\tfrac{1}{2}z\,\text{cot.}\alpha - \text{cof.}\tfrac{1}{2}z)(\text{fin.}\tfrac{1}{2}z\,\text{cot.}\gamma - \text{cof.}\tfrac{1}{2}z)$$
$$= (\text{fin.}\tfrac{1}{2}z - \text{cof.}\tfrac{1}{2}z\,\text{cot.}\beta)(\text{fin.}\tfrac{1}{2}z - \text{cof.}\tfrac{1}{2}z\,\text{cot.}\delta);$$

et facta reapfe mutiplicatione:

$$\varepsilon(\text{fin.}\tfrac{1}{2}z^2\,\text{cot.}\alpha\,\text{cot.}\gamma - \text{fin.}\tfrac{1}{2}z\,\text{cof.}\tfrac{1}{2}z(\text{cot.}\alpha + \text{cot.}\gamma) + \text{cof.}\tfrac{1}{2}z^2)$$
$$= \text{fin.}\tfrac{1}{2}z^2 - \text{fin.}\tfrac{1}{2}z\,\text{cof.}\tfrac{1}{2}z(\text{cot.}\beta + \text{cot.}\delta) + \text{cof.}\tfrac{1}{2}z^2\,\text{cot.}\beta\,\text{cot.}\delta,$$

vnde colligitur:

$$\varepsilon(1 + \text{cot.}\alpha\,\text{cot.}\gamma + \text{cof.}z(1 - \text{cot.}\alpha\,\text{cot.}\gamma) - \text{fin.}z(\text{cot.}\alpha + \text{cot.}\gamma)$$
$$= 1 + \text{cot.}\beta\,\text{cot.}\delta - \text{cof.}z(1 - \text{cot.}\beta\,\text{cot.}\delta) - \text{fin.}z(\text{cot.}\beta + \text{cot.}\delta),$$

hincque

$$\varepsilon\left(\frac{\text{cof.}(\alpha - \gamma) - \text{cof.}z\,\text{cof.}(\alpha + \gamma) - \text{fin.}z\,\text{fin.}(\alpha + \gamma)}{\text{fin.}\alpha\,\text{fin.}\gamma}\right)$$
$$= \frac{\text{cof.}(\beta - \delta) + \text{cof.}z\,\text{cof.}(\beta + \delta) - \text{fin.}z.\,\text{fin.}(\beta + \delta)}{\text{fin.}\beta\,\text{fin.}\delta};$$

pofito

poſito nunc breuitatis gratia $\mu = \frac{\varepsilon \sin.\beta \sin.\delta}{\sin.\alpha \sin.\gamma}$, aequatio in hanc ſequentem contrahetur:

$$\mu \cos.(\alpha-\gamma) - \cos.(\beta-\delta) - \cos.z(\mu \cos.(\alpha+\gamma) + \cos.(\beta+\delta)) + \sin.z(\mu \sin.(\alpha+\gamma) - \sin.(\beta+\delta)) = 0;$$

et in iſta aequatione ſi ponatur

$$\cot.\theta = \frac{\mu \cos.(\alpha+\gamma) + \cos.(\beta+\delta)}{\mu \sin.(\alpha+\gamma) - \sin.(\beta+\delta)},$$ prodibit

$$\frac{\mu \cos.(\alpha-\gamma) - \cos.(\beta-\delta)}{\mu \cos.(\alpha+\gamma) + \cos.(\beta+\delta)} - \cos.z - \tang.\theta \sin.z = 0,$$

hincque

$$\cos.(z-\theta) = \cos.z \cos.\theta + \sin.z \sin.\theta = \cos.\theta . \frac{\mu \cos.(\alpha-\gamma) - \cos.(\beta-\delta)}{\mu \cos.(\alpha+\gamma) + \cos.(\beta+\delta)}.$$

§. 14. Quo facilius valor anguli θ eliciatur, notemus eſſe

$$\tang.(\beta+\delta+\theta) = \frac{\cot.\theta + \cot.(\beta+\delta)}{\cot.\theta.\cot.(\beta+\delta) - 1},$$

vnde pro $\cot.\theta$ ſubſtituto eius valore modo allato, conſequemur:

$$\tang.(\beta+\delta+\theta) = \frac{\mu \cos.(\alpha+\gamma)\sin.(\beta+\delta) + \mu \sin.(\alpha+\gamma)\cos.(\beta+\delta)}{\mu \cos.(\alpha+\gamma)\cos.(\beta+\delta) - \mu \sin.(\alpha+\gamma)\sin.(\beta+\delta) + 1}$$

$$= \frac{\mu \sin.(\alpha+\beta+\gamma+\delta)}{1 + \mu \cos.(\alpha+\beta+\gamma+\delta)}.$$

Iam quia eſt

$$\alpha+\beta = CQB + CPB = 180° - PBQ \text{ et } \gamma+\delta = CQD + CQB = 180° - QDP;$$

fiet

$$\alpha+\beta+\gamma+\delta = 360° - PBQ - QDP.$$

Hinc

$$\sin.(\alpha+\beta+\gamma+\delta) = -\sin.(PBQ + PDQ),$$
$$\cos.(\alpha+\beta+\gamma+\delta) = \cos.(PBQ + PDQ).$$

Ponamus igitur

$$\eta = 180° - PBQ - PDQ,$$ fiet

 ſin.

$$\text{fin.}(\alpha+\beta+\gamma+\delta) = -\text{fin.}(PBQ+PDQ) = -\text{fin.}\eta;$$
$$\text{cof.}(\alpha+\beta+\gamma+\delta) = \text{cof.}(PBQ+PDQ) = -\text{cof.}\eta,$$

ideoque erit

$$\text{tang.}(\beta+\delta+\theta) = \frac{-\mu\ \text{fin.}\ \eta}{1-\mu\ \text{cof.}\ \eta}.$$

Tab. III. Fig. 4. Sit igitur triangulum ABD in quo $\frac{AB}{BD} = \mu$; ang. ABD $= \eta$, fi latus AD producatur, erit

$$\text{tang. } BDE = -\frac{AB.\ \text{fin. } ABD}{BD - AB\ \text{cof. } ABD} = \frac{-\mu\ \text{fin. } \eta}{1-\mu\ \text{cof. } \eta};$$

ideoque habebimus vel $BDE = \beta+\delta+\theta$; vel

$$\beta+\delta+\theta = 180° + BDE.$$

Caeterum dum ad valores cot. α, cot. γ etc. regredimur, fractio ifta $\frac{\mu\ \text{cof.}(\alpha-\gamma) - \text{cof.}\ \beta - \delta)}{\mu\ \text{cof.}(\alpha+\gamma) + \text{cof.}(\beta+\delta)}$, hunc quoque in modum exprimetur:

$$\frac{(\varepsilon-1)(1+bc\ \text{cof.}(n-m)) + (\varepsilon+1)(b\ \text{cof.}\ m + c\ \text{cof.}\ n)}{(\varepsilon+1)(1+bc\ \text{cof.}(n+m)) + (\varepsilon-1)(b\ \text{cof.}\ m + c\ \text{cof.}\ n)}.$$

Cuius fractionis conftructio ope ifta fractionum

$$\frac{1+bc\ \text{cof.}(n-m)}{b\ \text{cof.}\ m + c\ \text{cof.}\ n};\ \frac{1+bc\ \text{cof.}(n+m)}{b\ \text{cof.}\ m + c\ \text{cof.}\ n}$$

perficitur. At tamen facile patet conftructionem pro angulo z fatis effe perplexam, nec vllum adhuc nobis fe obtulit artificium, quo hae expreffiones

$$\frac{1+bc\ \text{cof.}(n-m)}{b\ \text{cof.}\ m + c\ \text{cof.}\ n};\ \frac{1+bc\ \text{cof.}(n+m)}{b\ \text{cof.}\ m + \text{cof.}\ n}$$

per angulos vel arcus in Figura facili negotio inueniendos, conftrui fe paterentur.

§. 15. Solutio Geometrica Cel. de *Caftillon* valde quum fit ingeniofa, haud praeter rem erit vt difpiciamus qua adhibita Analyfi Geometrica, ad folutionem iftam pertingere liceat. Quum in triangulis ACα, BNα, fit

Tab. II. Fig. 3.

ſit ang. $ACB + CAN = ANB + CBN$; erit

$$ACB - ANB = CBN - CAN, \text{ et ob}$$

$$ANB = \tfrac{1}{2} MCO = 90 - CMD, \text{ fiet}$$

$$ACB - 90 + CMD = CBN - CAN.$$

Nunc igitur ſi punctum B ad diſtantiam infinitam a C diſtet, ideoque angulus C B N euaneſcat, quod fiet dum N B ipſi A B parallela, erit

$$CAN + CMD = 90^{\circ} - ACB.$$

Iam ſi in recta A C capiatur punctum I ita, vt ſit $CI : CP = CP : CA$ et iungatur I M, facile liquet eſſe ang. $CMI = CAM$, vnde habebimus

$$CMI + CMD = 90 - ACB,$$

ſeu ang. IMD = angulo dato. Quare quum dentur puncta I, D, conſtructio eo reducitur, vt per bina iſta puncta deſcribatur ſegmentum circuli, quod capax eſt anguli iſtius dati. Interſectiones vero huius circuli cum iſto propoſito dabunt ſolutiones noſtri Problematis. Hincque iam patet Problematis ſolutionem concinne adornari, dum ad illum caſum ſpecialem reducitur, quo vnum trianguli latus datae rectae habetur parallelum. Iſta autem reductio quomodo fiat Celeb. *Caſtillon* docuit, nec heic repetere e re eſt.

§. 16. Conſtructio Geometrica a Cel. *Caſtillon* allata eo redit, vt in recta A B producta ſi opus ſit, ſumatur $AV : AN = AM : AB$; ſiue $AV = \frac{AC^2 - CM^2}{AB}$, tumque ducta C Z normali ad A B et iuncta C V, in illa capiatur $CU : CM = CM : CV$. Iuncta dein U D, conſtituatur ang. $UDQ = CVZ$, et capiatur $QD : UD = CV$

Tab. III. Fig. 4.

$= CV:ZV$, si super QD diametro describatur circulus, is datum circulum secabit in punctis M, *m*, per quae si ducantur rectae AMD, DOM, vel Anm, Dmo, triangula MNO, mno problemati satisfacient. Nostri instituti ratio nunc quidem non fert, vt huius constructionis demonstrationem adferamus, sed potius nobis propositum est vt ostendamus quomodo ad similem fere constructionem perueniamus quaerendo valorem anguli CDQ et rationem laterum $CD:DQ$ in triangulo CDQ. Nam puncto V vt antea determinato, si in recta CD capiatur CX tertia proportionalis radio circuli et huic rectae CD, tumque iungantur XZ, VX dico fore

$$\text{ang. } CDQ = XVZ \text{ et } CD:QD = VZ:XZ.$$

Quum enim $CU.CV = CM^2 = CX.CD$, patet puncta X, U, D, V in peripheria eiusdem circuli esse sita, ideoque ang. $CDU = CVX$, hinc

$$CDQ = CDU + UDQ = CVX + CVZ.$$

Tum vero ob

$$\triangle CXV \sim CUD,\ XV:CV = UD:CD \text{ et ob}$$

$CV:ZV = QD:UD$, ex aequo perturbate $XV:ZV = QD:CD$, ex quo etiam consequitur $\triangle QCD \sim \triangle ZXV$.

§. 17. Quum supra in soluendo Problemate peruenerimus ad aequationem quadraticam, ex natura istius aequationis iudicium adferri potest de conditione quae praescribitur, vt Problemati vel binae, vel tantum vnica, vel adeo nulla respondeat solutio. Nam si quantitas sub signo radicali fuerit positiua, Problemati binae respondebunt solutiones, si ista quantitas euanescat, tantum vnica habe-

habebitur Problematis ſolutio et denique ſi fuerit negatiua, nulla prorſus habebitur ſolutio. Quum igitur quantitas ſub ſigno radicali ſit, $\lambda^2 - \varepsilon \cot. \mu \cot. \nu$, ſi ponatur:

$$\text{tang.}\, \mu = \frac{P}{Q} = \frac{b\, \text{ſin.}\, m - c\, \text{ſin.}\, n + b\, c\, \text{ſin.}\, (n - m)}{1 - b\, c\, \text{coſ.}\, (n - m) + b\, \text{coſ.}\, m - c\, \text{coſ.}\, n};$$

$$\text{tang.}\, \nu = \frac{P}{Q'} = \frac{c\, \text{ſin.}\, n - b\, \text{ſin.}\, m - b\, c\, \text{ſin.}\, (n - m)}{1 - b\, c\, \text{coſ.}\, (n - m) + c\, \text{coſ.}\, n - b\, \text{coſ.}\, m};$$

$$\frac{a' + 1}{a' - 1} = \frac{P'}{P} = \frac{c\, \text{ſin.}\, n - b\, \text{ſin.}\, m + b\, c\, \text{ſin.}\, (n - m)}{b\, \text{ſin.}\, m - c\, \text{ſin.}\, n + b\, c\, \text{ſin.}\, (n - m)},$$

$$2\lambda = 1 + \varepsilon \left(\frac{a' + 1}{a' - 1}\right) = 1 + \frac{\varepsilon P'}{P},$$

deſignante $\varepsilon = \frac{a - 1}{a + 1}$. Hinc conſequemur:

$$4\lambda^2 - 4\varepsilon \cot. \mu \cot. \nu = 1 + \frac{2\varepsilon P'}{P} + \frac{\varepsilon^2 P'^2}{P^2} + \frac{4\varepsilon Q' Q}{P^2},$$

ex quo concludimus, prouti haec expreſſio:

$$P^2 + \varepsilon^2 P'^2 + 2\varepsilon (P P' + 2 Q Q'),$$

fuerit vel poſitiua, vel euaneſcens, vel negatiua, Problema vel binas, vel vnicam, vel nullam admittere ſolutiones. Subſtitutis nunc pro P, P', Q, Q', eorum valoribus iſta expreſſio

$$P^2 + \varepsilon^2 P'^2 + 2\varepsilon (P P' + 2 Q Q'),$$

in hanc abit:

$$(a-1)^2((b\text{ſin.}m-c\text{ſin.}n)^2-2bc\text{ſin.}(n-m)(b\text{ſin.}m-c\text{ſin.}n)+b^2c^2\text{ſin.}(n-m)^2)$$
$$+(a+1)^2((b\text{ſin}\, m-c\text{ſin.}n)^2+2bc\text{ſin.}n-m)(b\text{ſin.}m-c\text{ſin.}n)+b^2c^2\text{ſin.}(n-m)^2)$$
$$+ 2(a^2-1)(b^2c^2\,\text{ſin.}\,(n-m)^2 - (b\,\text{ſin.}\,m - c\,\text{ſin.}\,n)^2)$$
$$+ 4(a^2-1)((1-bc\text{coſ.}(n-m))^2 - (b\,\text{coſ.}\,m - c\,\text{coſ.}n)^2),$$

ex qua poſt varias reductiones demum haec elicitur expreſſio:

$$a^2 b^2 c^2 + a^2 + b^2 + c^2 - 1 - a^2 b^2 \text{coſ.}\, m^2 - a^2 c^2 \text{coſ.}\, n^2$$
$$- b^2 c^2 \text{coſ.}\, (n - m)^2$$
$$- 2abc(a\,\text{ſin.}m\text{ſin.}n-b\text{ſin.}m\text{ſin.}(n-m)+c\text{ſin.}n\text{ſin.}(n-m));$$

quae

quae prouti fuerit positiua, vel euanescens, vel negatiua declarabit vtrum Problemati binae respondeant solutiones, an vero tantum vnica, vel adeo nulla. Caeterum paradoxum singulare heic occurrit, quod casu quo $a = b = c = 1$, haec conditio non impleri videatur, si quidem tum ista expressio abit in:

$$\text{sin.}m^2 + \text{sin }n^2 + \text{sin.}(n-m)^2 - 2\,\text{sin.}m\,\text{sin.}n + 2\,\text{sin.}m\,\text{sin.}(n-m)$$
$$- 2\,\text{sin.}n\,\text{sin.}(n-m) = (\text{sin.}m - \text{sin.}n + \text{sin.}(n-m))^2;$$

heic autem minime est

$$\text{sin. }m - \text{sin. }n + \text{sin. }(n-m) = 0.$$

Verum pro isto casu perpendendum est denominatorem P, quoque aequari isti quantitati

$$\text{sin. }m - \text{sin. }n + \text{sin. }(n-m).$$

Si ponatur aliqua quantitatum a, b, c infinita expressio pro conditione Problematis multum contrahitur, posito enim $c = \infty$, fit:

$$a^2b^2 + 1 - a^2\,\text{cos}.\,n^2 - b^2\,\text{cos}.(n-m)^2 - 2ab\,\text{sin.}n\,\text{sin.}(n-m),$$

quae prouti fuerit positiua, aequalis nihilo, vel negatiua, Problema solutiones vel binas, vel vnicam, vel adeo nullam admittet. Dein si insuper ponatur quoque $b = \infty$, fiet expressio conditionalis $a^2 - \text{cos}.(n-m)^2$, vnde quoties $a > \text{cos}.(n-m)$, problema binas habet solutiones, si $a = \text{cos}.(n-m)$ vnicam, et si $a < \text{cos}.(n-m)$ nullam.

§. 18. Occasione huius Problematis propositi, solutionem quoque alius Problematis consimilis tentare in animum induxi; illius nimirum, quo quaeritur quadrilaterum circulo inscriptum, cuius bina latera opposita, per bina data transeant puncta, verum mox perspexi huic

quae-

quaeſtioni infinitas numero reſpondere ſolutiones. Caeterum tamen ad valde egregiam proprietatem horum quadrilaterorum me iſta diſquiſitio perduxit. Si ſcilicet quadrilaterum F H G E ita fuerit comparatum vt latera F E, G H per punctum A tranſeant, latera F H, E G per punctum B, ſi iungatur centrum circuli C cum B et in recta C B capiatur $CM : CE = CE : CB$, tumque iungatur A M, dico fore A M perpendicularem ad rectam C B. Iungantur

Tab. III. Fig. 6.

$$CE,\ CF,\ CG,\ CH,\ ME,\ MF,\ MG,\ MH,\ AC.$$

Nunc igitur ob

$$CB : CF = CF : CM \text{ erit } \triangle CMF \sim CBF;$$

ſimili modo

$$\triangle CHM \sim CBH:\ \triangle CEM \sim CEB;\ \triangle CGM \sim CGB,$$

hinc

$$\text{ang.}\,CFM = CHM = CBF;\ \text{ang.}\,CMF = HMB = CFB;$$

ex quo $FMH = FCH$; tum vero

$$\text{ang.}\,CEM = CGM = CBG;\ \text{ang.}\,CME = GMB = CEB;$$

nec non $EMG = ECG$; hincque

$$EMF = EMC + CMF = GMB + BMH = GMH.$$

Deinde quum ſit:

$$\text{ſin.}\,FEM : \text{ſin.}\,EMF = FM : EF \text{ et}$$

$$(\text{ſin.}\,EMF =)\ \text{ſin.}\,GMH : \text{ſin.}\,MGH = GH : MH$$

erit componendo rationes

$$\text{ſin}\,FEM : \text{ſin.}\,GMH = FM.GH : EF.MH = FM.BG : BF.MH$$

ob $\triangle BGH \sim BEF$, ideoque

$$BG : BF = GH : EF; \text{ atqui eſt}$$

$$FM : CF = FB : CB \text{ et } MH : CF = HB : CB,$$

hinc

$$FM : MH = FB : HB; \text{ quapropter fiet}$$

$$\text{sin.}FEM : \text{sin.}MGH = FB.BG : FB.HB = BG : HB = AG : AE.$$

Tum vero ob

$$\text{sin. } AME : \text{sin. } FEM = AE : AM$$

$$\text{sin. } MGH : \text{sin. } AMG = AM : AG$$

colligitur

$$AG : AE = \text{sin. } FEM : \text{sin. } MGH$$

$$= \text{sin. } AMG. \text{ sin. } FEM : \text{sin. } AME. \text{ sin. } MGH,$$

ex quo colligitur ang. $AME = AMG$ et ob

$$EMC = GMB, \text{ ang. } AMC = AMB = 90°.$$

Caeterum si dentur $AC = a$, $BC = b$ et angulus $ACB = m$, haec proprietas analytice ita concinne exprimi potest $a\, b$ cos $m = 1$. Est enim $CM = a$ cos. m, ideoque posito radio circuli $= 1$, ob $CM : CE = CE : CB$, erit a cos. $m : 1 = 1 : b$.

SUP-

SUPPLÉMENT
AU MÉMOIRE SUR UN PROBLÉME DU
CALCUL DES PROBABILITÉS
INSÉRÉ DANS LE VIe. VOLUME DES ACTES.

Par

NICOLAS FUSS.

En donnant la Solution de ce Problème, réſolu par feu M. *Jaques Bernoulli*, dans ſon ouvrage poſthume *De arte conieĉtandi*, j'ai d'abord avoué de n'en avoir vu que l'énoncé et le réſultat, tels qu'ils ſe trouvent dans un mémoire de M. *Mallet*, dans les *Aĉta Helvetica*, *Vol. VII.* Quoique mon réſultat étoit ſenſiblement différent de celui que M. *Bernoulli* devoit avoir trouvé, je ne me permis pas de ſoupçonner ſa ſolution, mais je crus devoir publier la mienne que je ſavois être juſte, en attendant que la ſource de cette différence ſe manifeſtat. Il n'y avoit qu'un mal entendu dans l'énoncé du Problème qui put l'expliquer; & effeĉtivement, ayant eu depuis l'occaſion de me procurer l'ouvrage de feu M. *Bernoulli*, j'y ai trouvé énoncé le Probleme de la manière ſuivante:

Duo collusores A & B, *tessera in alueum proiecta*, conueniunt inter se, vt quot eius puncta ceciderint, tot iactus vterque instituat, illeque depositum auferat, qui plura summatim puncta iecerit; sin autem aequalis punctorum numerus ambobus contingat, aequaliter etiam depositum inter se partiantur. Mox vero collusorum alter B, ludi pertaesus, loco incertae aleae certum punctorum numerum assumere et punctis 12 pro rata sua acquiescere mavult. Annuit A. Quaeritur vter altero et quanto potiorem vincendi spem habeat?

& d'abord après cet énonce M. *Bernoulli* distingue deux cas, en disant: *Determinandum ante omnia, an primus tesserae iactus accenseri debeat iactibus collusoris A, nec ne?* & il traite l'un & l'autre. Or je n'avois consideré que le premier cas & le rapport que j'ai trouvé entre l'esperance des deux joueurs est parfaitement d'accord avec celui de *Bernoulli* sçavoir: A : B = 46529 : 46783.

Ayant tant fait que de publier ma Solution, dans l'idée qu'elle étoit différente de celle de M. *Bernoulli*, pour la rendre complette je vais lui ajouter ici le développement de l'autre cas, où les points du premier jet ne sont pas comptés, ce qui, comme l'on voit aisément, rend la partie du joueur B encore plus avantageuse, quoique, à en juger d'après le raisonnement trompeur que j'ai allegué dans mon premier mémoire comme un exemple de la circonspection qu'il faut apporter dans ces sortes de questions, le joueur A a également $12\frac{1}{4}$ de points contre les 12 points de B. Car

s'il

s'il jette 1, il a 0 points & $\frac{7}{2}$ d'esperance pour 1 suivant
- - - 2 - - - - - $\frac{14}{2}$ - - - - - 2 - -
- - - 3 - - - - - $\frac{21}{2}$ - - - - - 3 - -
- - - 4 - - - - - $\frac{28}{2}$ - - - - - 4 - -
- - - 5 - - - - - $\frac{35}{2}$ - - - - - 5 - -
- - - 6 - - - - - $\frac{42}{2}$ - - - - - 6 - -

$$\frac{1}{6}\cdot\frac{147}{2} = 12\tfrac{1}{4}$$

tout comme dans le premier cas.

Avant que de commencer l'énumeration des esperances du joueur A, il faut faire celle de tous les cas qui peuvent avoir lieu, lorsqu'avec un nombre quelconque de dez on veut amener un certain nombre de points. Soit pour cet effet le nombre des dez $= n$ le nombre des points $= \mu$ & le nombre des cas $= \Lambda$, j'ai fait voir dans le premier memoire, qu'il y aura

$$\Lambda = \left(\frac{\mu-1}{n-1}\right) - \left(\frac{n}{1}\right)\left(\frac{\mu-7}{n-1}\right) + \left(\frac{n}{2}\right)\left(\frac{\mu-13}{n-1}\right) - \left(\frac{n}{3}\right)\left(\frac{\mu-19}{n-1}\right) + \&c.$$

où les caractères $\left(\frac{n}{1}\right)$, $\left(\frac{n}{2}\right)$, $\left(\frac{n}{3}\right)$, &c. sont les coëfficiens des puissances du binome developpé, & $\left(\frac{\mu-1}{n-1}\right)$, $\left(\frac{\mu-7}{n-1}\right)$, $\left(\frac{\mu-13}{n-1}\right)$, &c. des produits semblables, savoir:

$$\left(\frac{\mu-1}{n-1}\right) = \frac{(\mu-1)(\mu-2)(\mu-3)(\mu-4)\ldots\ldots(\mu-n+1)}{(n-1)(n-2)(n-3)\ldots 1}$$

$$\left(\frac{\mu-7}{n-1}\right) = \frac{(\mu-7)(\mu-8)(\mu-9)(\mu-10)\ldots\ldots(\mu-n+7)}{(n-1)(n-2)(n-3)\ldots\ldots 1}$$

&c. &c.

d'où il sera facile de construire la petite table suivante, étenduë jusqu'à $n = 6$ & $\mu = 12$:

n	2	3	4	5	6
μ	Λ	Λ	Λ	Λ	Λ
2	1				
3	2	1			
4	3	3	1		
5	4	6	4	1	
6	5	10	10	5	1
7	6	15	20	15	6
8	5	21	35	35	21
9	4	25	56	70	56
10	3	27	80	126	126
11	2	27	104	205	252
12	1	25	125	305	456
	36	160	435	762	918

Soit 2 M la ſomme dépoſée que A gagne en amenant par tous ſes jets au-delà de douze points, pendant qu'il ne gagne que la moitié M, en amenant douze points ſeulement; ſoyent de plus les eſperances du joueur A, *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, *f*, en amenant au premier coup l'As, le Deux, le Trois, le Quatre, &c. & leur ſomme

$$a + b + c + d + e + f = s,$$

l'entiere eſperance de A ſera $\frac{1}{6}s$, & celle de B ſera $2\,M - \frac{1}{6}s$.

Cela remarqué, ſi le joueur A jette l'as au premier coup, il n'aura à rejetter le dez qu'une ſeule fois, & ne pouvant attendre de ce jet que ſix points tout au plus, il a perdu & ſon eſperance ſera $a = 0$.

Si

Si le joueur A jette le Deux au premier coup, il pourra rejetter le dez deux fois de ſuite, ou bien il jettera deux dez à la fois. Avec ces deux dez il ne pourra atteindre que douze points tout au plus, & il n'y a qu'une ſeule façon de les amener. Ainſi, le nombre de tous les cas poſſibles de jetter deux dez étant $= 6^2$, la probabilité qu'a le joueur A de jetter 12 points eſt $\frac{1}{6^2}$, & partant ſon eſperance ſur la moitié du gain $b = \frac{1}{36}$ M.

Si A jette le Trois, il prendra trois dez, & il y aura 25 cas qui peuvent donner 12 points, & $6^3 - 130 = 56$ qui peuvent produire au-delà de 12. La probabilité eſt $= \frac{25}{6^3}$ pour le premier cas & $\frac{56}{6^3}$ pour l'autre. Dans celui-ci A gagne tout, dans le premier ſeulement la moitié. Son eſperance eſt donc

$$c = \frac{25}{6^3} \text{M} + \frac{2.56}{6^3} \text{M} = \frac{137}{6^3} \text{M}.$$

Si A jette le Quatre, il fera le ſecond jet avec quatre dez, où il y a 125 manières différentes d'amener 12 points & $6^4 - 435 = 861$ manières d'amener au-delà de 12. La probabilité du premier eſt $\frac{125}{6^4}$, de l'autre elle eſt $\frac{861}{6^4}$ & la ſomme des eſperances

$$d = \frac{125}{6^4} \text{M} + \frac{2.861}{6^4} \text{M} = \frac{1847}{6^4} \text{M}.$$

Si le premier jet donne cinq points le ſecond ſe fera avec cinq dez, & parce qu'il y a 305 cas qui produiſent 12 points, & $6^5 - 762 = 7014$ cas qui en donnent d'avantage l'eſperance du joueur A ſera

$$e = \frac{305 + 2.7014}{6^5} \text{M} = \frac{14333}{6^5} \text{M}.$$

Enfin

Enfin ſi le premier jet authoriſe à prendre ſix dez pour le ſecond coup, l'eſperance de A ſur la moitié du gain M ſera $\frac{456}{6^6}$ M, & ſur le gain entier 2 M elle ſera $(6^6 - 918)$ 2 M, ou bien $\frac{91476}{6^6}$ M, & par conſéquent

$$f = \frac{91932}{6^6} M = \frac{15322}{6^5} M.$$

La ſomme de ces esperances, reduite au même dénominateur ſera donc

$$s = \frac{6^3 + 6^2 . 137 + 6 . 1847 + 14333 + 15322}{6^5} M$$

& partant l'eſperance entière du joueur

$$A = \frac{1}{6} s = \frac{45885}{6^6} M$$

& celle du joueur

$$B = 2 M - \frac{1}{6} s = \frac{47427}{6^6} M.$$

Ainſi l'esperance de A eſt à celle de B comme

$$45885 : 47427 = 15295 : 15809.$$

Rapport que M. *Bernoulli* a auſſi trouvé.

PHYSI-

PHYSICO-
MATHEMATICA.

DILVCIDATIONES DE MOTV CHORDARVM INAEQVALITER CRASSARVM.

Auctore

L. EVLERO.

Cum mihi nuper praelegeretur egregia dissertatio Illustr. *Bernoulli*, de motu chordarum inaequaliter crassarum, *Actis Academiae Berolinensis pro Anno* 1767 *inserta*, mirifice mihi placuit formula generalis, quam dedit pro crassitie variabili chordae, vt eius motus saltem regularis per sinus cuiuspiam anguli exprimi posset. Statim igitur in mentem mihi venit, num pro his casibus etiam motus in genere definiri, ac solutio perfecta exhiberi queat. Saepius enim iam monui, solutionem perfectam huiusmodi quaestionum sollicite distingui opportere a solutionibus generalibus, quae quidem omnes motus possibiles in se complectuntur; sed quia numero terminorum infinito constant, ad eos casus, quibus status chordae initialis praescribitur,

 neuti-

neutiquam accommodari possunt: si quidem infinitos coëfficientes definiri oporteret, id quod omnes Analyseos vires superaret. Ad solutionem scilicet perfectam huiusmodi Problematum requiritur, vt motus per quampiam formulam finitam exprimatur, cuius applicationem ad quosuis status initiales exsequi liceat, qualem solutionem Celeberr. *la Grange* et ego iam dudum dedimus pro chordis vniformiter crassis, quae functionibus generalissimis siue continuis siue discontinuis continetur; cuius ope pro quouis statu initiali totus chordae motus facillime determinari potest, id quod per alias solutiones, etiamsi omnes motus possibiles in se complectantur, nullo modo praestare licet. Huius rei exemplum iam pridem proposui circa chordam, cuius aliqua tantum portio initio de statu naturali deturbetur, dum reliqua pars in directum maneat extensa, quem casum nemo adhuc per formulas illas sinuum in infinitum progredientes assignare valuit. Hanc ob caussam etiam determinatio motuum, quibus laminae elasticae cieri possunt, nequaquam pro solutione completa haberi potest: propterea quod eam non ad quemuis statum initialem accommodare licet. Multo minus, quae de oscillationibus funium perfecte flexibilium sunt prolata, solutionem perfectam continent; propterea quod formulae non solum in infinitum progrediuntur, sed etiam ne omnes quidem motus regulares assignare licet. His igitur praemissis inuestigationem meam de motu chordarum inaequaliter crassarum aggredior.

Tab. IV. Fig. 1. §. 1. Repraesentet igitur recta A B chordam vtcunque inaequaliter crassam et in punctis A et B fixam, cuius longitudo sit $AB = a$; tum sumta eius portione qua-

quacunque indefinita $AX = x$, ſit hoc loco craſſities ſeu ſectio chordae transuerſa $= uu$, vt volumen huius portionis AX ſit $\int uu\,dx$, quo ſimul eius maſſa et pondus exprimatur; vis autem, qua haec chorda tenditur, aequalis ſit ponderi, quod maſſa eiusdem materiae, ex qua chorda conſtat, cuius volumen ſit $= c^3$, eſſet habiturum. His poſitis ſi elapſo tempore $= t''$ punctum chordae X reperiatur in Y, et haec applicata quaſi infinite parua ponatur $XY = y$, ex iis, quae de motu chordarum iam ſaepius ſunt tradita, conſtat, omnes motus exprimi hac aequatione differentiali ſecundi gradus:

$$\frac{uu}{2g}\left(\frac{ddy}{dt^2}\right) = c^3\left(\frac{ddy}{dx^2}\right), \text{ ſiue } \frac{1}{2g}\left(\frac{ddy}{dt^2}\right) = \frac{c^3}{uu}\left(\frac{ddy}{dx^2}\right),$$

cuius integrale completum ſi exhiberi poſſet, praeberet ad quoduis tempus quantitatem applicatae $XY = y$. Facile autem intelligitur, tale integrale completum in genere pro quacunque craſſitiei lege nequaquam ſperari poſſe, ex quo in eiusmodi leges craſſitiei uu inquiri conuenit, pro quibus ſolutio perfecta obtineri queat.

§. 2. Hic autem primo ſum contemplaturus caſum, quem Illuſtris *Bernoulli* tractauit, vbi inueſtigauit, cuiusmodi functio ipſius x ſtatui debeat craſſities uu, vt ſaltem motum chordae regularem et quaſi principalem per ſinum cuiuspiam anguli exprimere liceat. Hunc in finem ſit k longitudo penduli ſimplicis, cuius oſcillationes cum motu chordae congruant: et iam ſatis conſtat eſſe debere $\frac{1}{2g}\left(\frac{ddy}{dt^2}\right) = -\frac{y}{k}$, cuius aequationis integrale completum, ſumto x conſtante, eſt $y = F : \text{ſin.}\left(\zeta + t\sqrt{\frac{2g}{k}}\right)$, vbi litera F functionem quamcunque ipſius x ſignificare poteſt; tum igitur etiam neceſſe eſt fieri

$$\frac{c^5}{uu}\left(\frac{ddy}{dx^2}\right) = -\frac{y}{k}, \text{ fiue } y + \frac{c^5 k}{uu}\left(\frac{ddy}{dx^2}\right) = 0,$$

Atque hic iam quaeritur, qualis functio craſſities uu ipſius x eſſe debeat, vt integrale huius aequationis per ſinum cuiuspiam anguli exprimi queat, ita vt ſit $y = p$ ſin. q, vbi p et q certas functiones ipſius x exprimant. Quia autem applicata y euaneſcere debet, tam poſito $x = 0$ quam $x = a$, primo functio u ita debet eſſe comparata, vt euaneſcat poſito $x = 0$; tum vero vt poſito $x = a$ fiat $q = \pi$, denotante π ſemiperipheriam circuli, cuius radius $= 1$. Hanc ob rem denotet X talem functionem ipſius x, quae facto $x = 0$ euaneſcat; tum vero poſito $x = a$ haec functio X abeat in A, ac manifeſtum eſt huic duplici conditioni ſatisfieri, ſi ſumatur $q = \frac{\pi X}{A}$, ita vt ſit $y = p$ ſin. $\frac{\pi X}{A}$.

§. 3. Quoniam autem in noſtra inueſtigatione tantum differentiale huius anguli $\frac{\pi X}{A}$ in computum ingreditur: ponamus $\frac{\pi X}{A} = \int v\,dx$, vt ſit $y = $ ſin. $\int v\,dx$; hinc igitur differentiando erit

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dp}{dx} \text{ ſin.} \int v\,dx + pv \text{ cof.} \int v\,dx;$$

hincque porro

$$\frac{ddy}{dx^2} = \frac{ddp}{dx^2} \text{ ſin.} \int v\,dx + \frac{v\,dp}{dx} \text{ cof.} \int v\,dx$$
$$+ d.\frac{pv}{dx} \text{ cof.} \int v\,dx - pvv \text{ ſin.} \int v\,dx.$$

Quia autem in valore y coſinus iſtius anguli non occurrit, neceſſe eſt vt etiam hic termini coſinum continentes ſe deſtruant, vnde fiet

$$v\,dp + d.pv = 0, \text{ ſiue } 2v\,dp + p\,dv = 0,$$

quae aequatio ducta in p et integrata praebet: $ppv = \alpha$, ideo-

ideoque $v = \frac{\alpha}{pp}$, vbi α denotat constantem quamcunque. Hinc igitur erit

$$\frac{ddy}{dx^2} = \left(\frac{ddp}{dx^2} - \frac{\alpha\alpha}{p^3}\right) \text{fin.} \int v\, dx;$$

quo valore substituto aequatio nostra $y - \frac{c^3 k}{uu}\left(\frac{ddy}{dx^2}\right) = 0$, nobis suppeditat istam relationem:

$$p + \frac{c^3 k}{uu}\left(\frac{ddp}{dx^2} - \frac{\alpha\alpha}{p^3}\right) = 0,$$

vnde deducitur craſſities quaeſita

$$uu = \frac{c^3 k}{p}\left(\frac{\alpha\alpha}{p^3} - \frac{ddp}{dx^2}\right).$$

Videri hic quidem poſſet ex hac aequatione etiam viciſſim p per uu definiri potuiſſe, ita vt ipſa craſſities uu arbitrio noſtro relinqueretur. Verum tentanti mox patebit, illam aequationem differentialem ſecundi gradus in genere nullo modo reſolutionem admittere.

§. 4. Cum igitur iam pro p functio quaecunque ipſius x accipi queat, erit $\int v\, dx = \alpha \int \frac{dx}{pp}$, quod integrale ita eſt capiendum, vt euaneſcat poſito $x = 0$; tum vero fieri oportet $\frac{\pi X}{A} = \alpha \int \frac{dx}{pp}$; vnde, quia poſito $x = a$ fit $X = A$, hinc noua determinatio conſtantium eſt petenda. Dein quia in hac integratione tempus t pro conſtante eſt habitum, valor ipſius $y = p$ ſin $\int v\, dx$ inſuper per functionem quamcunque temporis, quae ſit T, multiplicari poteſt, ita vt ſit $y = T\, p$ ſin. $\int v\, dx$. Ex conſideratione vero temporis habebamus $y = F :$ ſin. $(\zeta + t\sqrt{\frac{2g}{k}})$, quae ergo duae aequationes identicae ſunt reddendae, quod fiet ſi ſumamus $F = C\, p$ ſin. $\int v\, dx$ et $T = C$ ſin. $(\zeta + t\sqrt{\frac{2g}{k}})$, ita vt motus iſte regularis noſtrae chordae definiatur hac

aequa-

aequatione:

$$y = C p \sin. \int v\, dx \sin. (\zeta + t \sqrt{\tfrac{2g}{k}}),$$

dummodo craſſities chordae ita fuerit comparata, vt ſit

$$u u = \frac{c^3 k}{p} \left(\frac{\alpha\alpha}{p^4} - \frac{d d p}{d x^2}\right)$$

exiſtente $v = \frac{\alpha}{p p}$.

§. 5. Hoc autem modo vnica tantum ſpecies vibrationum regularis refertur. Vt igitur plures ſimul complectamur loco π ſcribamus $i\pi$; denotante i numerum integrum quemcunque, et faciamus $\int v\, dx = \frac{i\pi X}{A}$; tum vero ſumta pro p functione quacunque ipſius x, quia invenimus $v = \frac{\alpha}{p p}$, ſtatim ſtatuere licet $X = \int \frac{dx}{p p}$, fietque

$$\int v\, dx = \alpha X = \frac{i\pi X}{A},$$

ſicque erit conſtans $\alpha = \frac{i\pi}{A}$; quo valore ſubſtituto nanciſcimur craſſitiem chordae $u u = c^2 k \left(\frac{i i \pi\pi}{A A p^4} - \frac{d d p}{p d x^2}\right)$; vbi notandum, hunc valorem neutiquam a numero i pendere debere; quia alioquin quaelibet alia vibrationum ſpecies aliam craſſitiem requireret, vnde pro k talis functio ipſius i accipi debet, vt numerus i penitus ex iſta formula excludatur; quo obſeruato motus chordae iſta aequatione exprimetur:

$$y = C p \sin. \frac{i\pi X}{A} \sin. (\zeta + t \sqrt{\tfrac{2g}{k}}),$$

hincque tempus vnius vibrationis erit $\pi \sqrt{\frac{k}{2g}}$ min. ſec. et ſonus hinc oriundas $\frac{\sqrt{2g}}{\pi\sqrt{k}}$. Quo autem melius indolem harum formularum perſpiciamus, aliquot caſus particulares euoluamus.

Caſus

Casus primus.

quo $p = \lambda x + \mu$.

§. 6. Hinc igitur erit

$$X = \int \frac{dx}{(\lambda x + \mu)^2} = \frac{-1}{\lambda(\lambda x + \mu)} + C.$$

quae constans C cum ita debeat sumi, vt posito $x = 0$ fiat etiam $X = 0$, erit $X = \frac{x}{\mu(\lambda x + \mu)}$; vnde facto $x = a$ erit $A = \frac{a^2}{\mu(\lambda a + \mu)}$, sicque $\frac{X}{A} = \frac{x(\lambda a + \mu)}{a(\lambda x + \mu)}$. Porro pro crassitie, quoniam $ddp = 0$, habebimus

$$uu = \frac{c^3 k . ii \pi \pi \mu \mu (\lambda a + \mu)^2}{aa(\lambda x + \mu)^4}.$$

Vt igitur hinc numerum i excludamus, statuamus $iik = f$, vt sit $k = \frac{f}{ii}$, eritque

$$uu = c^3 f. \frac{\pi \pi \mu \mu (\lambda a + \mu)^2}{aa(\lambda x + \mu)^4}.$$

Hinc tempus vnius vibrationis fiet $\frac{\pi}{i} \sqrt{\frac{f}{2g}}$ et sonus ipse $= \frac{i\sqrt{2g}}{\pi\sqrt{f}}$.

§. 7. Quia inuenimus

$$uu = c^3 f. \frac{\pi \pi \mu \mu (\lambda a + \mu)^2}{aa(\lambda x + \mu)^4}$$

in ipso termino A, vbi $x = 0$, erit crassities $= c^3 f. \frac{\pi\pi(\lambda a + \mu)^2}{aa\mu\mu}$, in altero vero termino, vbi $x = a$, ea erit $c^3 f \frac{\pi \pi \mu \mu}{aa(\lambda a + \mu)^2}$; Intra hos autem terminos crassities variatur in ratione reciproca quadruplicata formulae $\lambda x + \mu$. Hinc igitur quantitates constantes λ et μ ita accipi possunt, vt in vtroque termino A et B chorda datam obtineat crassitiem. Veluti si in termino A crassities ponatur $= \alpha\alpha$, pro altero vero termino $B = \beta\beta$, quantitates λ et μ sequenti modo determinabuntur. Ponamus breuitatis gratia $c^3 f \frac{\pi\pi}{aa} = ee$, vt

fiat $\alpha\alpha = ee\frac{(\lambda a + \mu)^2}{\mu\mu}$ et $\beta\beta = ee\frac{\mu\mu}{(\lambda a + \mu)^2}$, vnde extracta radice erit $\alpha = \frac{e(\lambda a + \mu)}{\mu}$ et $\beta\beta = \frac{e\mu}{\lambda a + \mu}$. Ex priore expressione fit $\frac{\lambda}{\mu} = \frac{(\alpha - e)}{ae}$, ex posteriore vero $\frac{\lambda}{\mu} = \frac{e - \beta}{\beta a}$; vnde patet, crassities $\alpha\alpha$ et $\beta\beta$ non pro lubitu assumi posse, siquidem quantitati e valor datus tribuatur. At si literis α et β dati valores dentur, litera e ex hac aequatione definietur: $\frac{\alpha - e}{e} = \frac{e - \beta}{\beta}$, ex qua fit $e = \sqrt{\alpha\beta}$; hincque porro fit

$$\frac{\lambda}{\mu} = \frac{\alpha - \sqrt{\alpha\beta}}{a\sqrt{\alpha\beta}} = \frac{\sqrt{\alpha} - \sqrt{\beta}}{a\sqrt{\beta}}.$$

Hinc si capiatur $\mu = a$, erit

$$\lambda = \frac{\sqrt{\alpha} - \sqrt{\beta}}{\sqrt{\beta}} = \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} - 1.$$

Quia autem requiritur vt sit $ee = \alpha\beta$, erit

$$\alpha\beta = c^3 f\frac{\pi\pi}{aa}; \text{ hincque } c^3 f = \frac{aa\alpha\beta}{\pi\pi}.$$

hincque porro $f = \frac{aa\alpha\beta}{c^3\pi\pi}$, vbi c^3 denotat tensionem nostrae chordae, quae, manente chorda, vtcunque variari potest. Hinc etiam patet, quomodo vibrationes mutata tensione se sint habiturae: Erit enim tempus cuiusque vibrationis $= \frac{a}{i}\sqrt{\frac{\alpha\beta}{2gc^3}}$ et ipse sonus $= \frac{i}{a}\sqrt{\frac{2gc^3}{\alpha\beta}}$; vnde patet, sonum sequi rationem subduplicatam tensionis c^3, prorsus vti in chordis vniformiter crassis.

§. 8. Quod si ergo pro chorda nostra detur crassities in termino $A = \alpha\alpha$, in altero vero termino $B = \beta\beta$: pro quouis loco medio X, existente $AX = x$, ob $\lambda = \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} - 1$ et $\mu = a$, erit crassities $uu = \frac{a^4\alpha\alpha}{(\lambda x + a)^4}$. Pro ipso autem motu prodibit ista expressio:

$$y = C(\lambda x + a)\sin.\frac{i\pi x}{\lambda x + a}\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}\sin.(\zeta + \frac{i\pi}{a}t\sqrt{\frac{2gc^3}{\alpha\beta}}).$$

Sic igitur manifestum est eandem chordam, quam descripsimus

ſimus, infinitos motus regulares recipere poſſe, et quidem pro eadem tenſione c^2; vnde pro ſingulis valoribus numeri i ſoni ſequentibus formulis exprimentur:

$$\frac{1}{a}\sqrt{\frac{2gc^2}{\alpha\beta}},\ \frac{2}{a}\sqrt{\frac{2gc^2}{\alpha\beta}},\ \frac{3}{a}\sqrt{\frac{2gc^2}{\alpha\beta}},\ \text{etc.}$$

quae formulae numerum vibrationum vno minuto ſecundo editarum indicant. Euidens igitur eſt hos diuerſos ſonos ſecundum ſeriem numerorum naturalium 1, 2, 3, 4, etc. progredi, prorſus vt euenit in chordis vniformiter craſſis.

§. 9. Cum igitur innumerabiles prodierint ſoni ſimplices, quos noſtra chorda edere poterit, iis vtcunque inter ſe permiſcendis orientur omnes plane ſoni mixti, qui produci poſſunt; atque adeo aequatio generalis exhiberi poteſt, quae omnes iſtos motus poſſibiles in ſe complectatur, quae erit

$$\begin{aligned} y = {} & C(\lambda x + a)\,\text{ſin.}\,\frac{\pi x}{\lambda x + a}\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}\ \text{ſin.}\,(\zeta + \frac{\pi}{a}\,t\sqrt{\frac{2gc^2}{\alpha\beta}}) \\ & + C'(\lambda x + a)\,\text{ſin.}\,\frac{2\pi x}{\lambda x + a}\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}\ \text{ſin.}\,(\zeta' + \frac{2\pi}{a}\,t\sqrt{\frac{2gc^2}{\alpha\beta}}) \\ & + C''(\lambda x + a)\,\text{ſin.}\,\frac{3\pi x}{\lambda x + a}\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}\ \text{ſin.}\,(\zeta'' + \frac{3\pi}{a}\,t\sqrt{\frac{2gc^2}{\alpha\beta}}) \\ & + C'''(\lambda x + a)\,\text{ſin.}\,\frac{4\pi x}{\lambda x + a}\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}\ \text{ſin.}\,(\zeta''' + \frac{4\pi}{a}\,t\sqrt{\frac{2gc^2}{\alpha\beta}}) \\ & + \text{etc.} \end{aligned}$$

vbi tam literae C, C', C'', quam ζ, ζ', ζ'' etc. penitus pro arbitrio accipi poſſunt. Quia vero haec expreſſio in infinitum extenditur, maxime etiamnunc deſideratur formula finita omnes pariter motus poſſibiles comprehendens, qualis pro chordis vniformiter craſſis eſt inuenta. Niſi enim talis expreſſio habeatur, quaeſtio, qua ex dato ſtatu initiali motus ſecuturus poſtulatur, ne ſuſcipi quidem poteſt. Nemo autem profecto negabit, quin etiam his chordis initio figura quaecunque pro lubitu imprimi

 poſſit,

possit, vnde sine vllo dubio certus motus sequetur, cuius determinatio merito postulari potest.

Casus secundus.

quo assumitur $p = \sqrt{(\lambda x + \mu)}$.

§. 10. Hinc igitur erit

$$X = \int \frac{dx}{pp} = \int \frac{dx}{\lambda x + \mu} = \frac{1}{\lambda} l \frac{\lambda x + \mu}{\mu} \text{ et } A = \frac{1}{\lambda} l \frac{\lambda a + \mu}{\mu},$$

ergo

$$\frac{X}{A} = \frac{l \frac{\lambda x + \mu}{\mu}}{l \frac{\lambda a + \mu}{\mu}}.$$

Tum vero pro crassitie inuenienda, ob

$$p = \sqrt{(\lambda x + \mu)} \text{ et } l p = \frac{1}{2} l (\lambda x + \mu), \text{ erit}$$

$$\frac{dp}{p dx} = \frac{\frac{1}{2}\lambda}{\lambda x + \mu},$$

ac denuo differentiando

$$\frac{ddp}{p dx^2} - \frac{dp^2}{pp dx^2} = \frac{-\frac{1}{2}\lambda\lambda}{(\lambda x + \mu)^2}.$$

Est vero

$$\frac{dp^2}{pp dx^2} = \frac{\frac{1}{4}\lambda\lambda}{(\lambda x + \mu)^2}$$

ex quo colligitur

$$\frac{ddp}{p dx^2} = \frac{-\frac{1}{4}\lambda\lambda}{(\lambda x + \mu)^2};$$

hinc igitur oritur crassities

$$uu = \frac{c^3 k}{AA(\lambda x + \mu)^2} (ii\pi\pi + \frac{1}{4}\lambda\lambda AA).$$

Pona-

Ponatur igitur

$$k(ii\pi\pi+\tfrac{1}{4}\lambda\lambda AA)=f, \text{ vt fit } k=\frac{f}{ii\pi\pi+\tfrac{1}{4}\lambda\lambda AA},$$

vbi f eſt quantitas a numero i non pendens; erit ergo $uu=\frac{c^3 f}{AA(\lambda x+\mu)^2}$, vnde pro initio A, vbi $x=0$, erit craſſities $\frac{c^3 f}{AA\mu\mu}$, et pro altero termino, vbi $x=a$, erit craſſities $=\frac{c^3 f}{AA(\lambda a+\mu)^2}$. Quod ſi ergo prior craſſities ponatur vt ante $=\alpha\alpha$, poſterior vero $=\beta\beta$, ponaturque $\frac{c^3 f}{AA}=ee$, erit $\alpha\alpha=\frac{ee}{\mu\mu}$ et $\beta\beta=\frac{ee}{(\lambda a+\mu)^2}$; ex priore ſtatim fit $\mu=\frac{e}{\alpha}$, ex poſteriore vero $\lambda=\frac{e-\beta\mu}{\beta a}=\frac{e(\alpha-\beta)}{\alpha\beta a}$, quibus valoribus ſubſtitutis erit $ee=\frac{c^3 f}{AA}$; quae formula ob $A=\frac{\alpha\beta a}{e(\alpha-\beta)}l\frac{\alpha}{\beta}$, praebet hanc aequationem:

$$1=\frac{c^3 f(\alpha-\beta)^2}{\alpha\alpha\beta\beta aa(l\frac{\alpha}{\beta})^2}, \text{ ſicque erit}$$

$$c^3 f=\frac{\alpha\alpha\beta\beta aa(l\frac{\alpha}{\beta})^2}{(\alpha-\beta)^2}$$

ita vt in genere ſit craſſities

$$uu=\frac{\alpha^2\beta^2 a^2}{((\alpha-\beta)x+a\beta)^2},$$

quae ergo etiam non a tenſione c^3 pendet, prorſus vti rei natura poſtulat, et craſſities erit in X reciproce vt

$$((\alpha-\beta)x+\beta a)^2.$$

§. 11. Definita igitur chorda in ſingulis punctis, in formulam pro tempore inquiramus, et quia poſuimus $ee=\frac{c^3 f}{AA}$, erit

$$f=\frac{AAee}{c^3}=\frac{\alpha\alpha\beta\beta aa}{c^3(\alpha-\beta)^2}(l\frac{\alpha}{\beta})^2. \text{ Poſueramus vero}$$

 $f=$

$$f = k(ii\pi\pi + \tfrac{1}{4}\lambda\lambda AA) = k(ii\pi\pi + \tfrac{1}{4}(l\tfrac{\alpha}{\beta})^2),$$

sicque

$$k = \frac{f}{ii\pi\pi + \frac{1}{4}(l\frac{\alpha}{\beta})^2} \text{ quocirca erit}$$

$$k = \frac{\alpha\alpha\beta\beta aa(l\frac{\alpha}{\beta})^2}{c^3(\alpha-\beta)^2(ii\pi\pi + \frac{1}{4}(l\frac{\alpha}{\beta})^2)};$$

quare cum tempus vnius vibrationis sit $\pi\sqrt{\frac{k}{2g}}$, et ipse sonus editus

$$= \frac{\sqrt{2g}}{\pi\sqrt{k}} = \frac{(\alpha-\beta)\sqrt{2gc^3(ii\pi\pi + \frac{1}{4}(l\frac{\alpha}{\beta})^2)}}{\pi\alpha\beta a l\frac{\alpha}{\beta}},$$

patet, si literae i successiue tribuamus valores 1, 2, 3, 4, etc. sonos diuersos progredi secundum hanc progressionem:

$$\sqrt{(\pi\pi + \tfrac{1}{4}(l\tfrac{\alpha}{\beta})^2)},\ \sqrt{(4\pi\pi + \tfrac{1}{4}(l\tfrac{\alpha}{\beta})^2)},\ \sqrt{(9\pi\pi + \tfrac{1}{4}(l\tfrac{\alpha}{\beta})^2)}$$
$$\sqrt{(16\pi\pi + \tfrac{1}{4}(\tfrac{\alpha}{\beta})^2)}, \text{ etc.}$$

vnde intelligitur hos sonos nulla harmonia inter se esse connexos, quoniam singuli per formulas irrationales exprimuntur. Hic notasse iuuabit, si sumatur $\beta = \alpha$, tum casum prodire pro chordis vniformiter crassis: fiet enim vbique $uu = aa$, et quia vbique formula $\frac{\alpha-\beta}{l\frac{\alpha}{\beta}}$ abit in α, sonus editus erit $\frac{i\sqrt{2gc^3}}{\alpha a}$, id quod egregie conuenit cum iis, quae de his chordis sunt inuenta.

§. 12. Nunc denique etiam formulam $\frac{i\pi X}{A}$ expediamus, et quia inuenimus $\lambda = \frac{e(\alpha-\beta)}{\alpha\beta a}$, et $\mu = \frac{e}{a}$, erit

$$X = \frac{\alpha\beta a}{e(\alpha-\beta)} l \frac{\alpha x - \beta x + \beta a}{\beta a},$$

 hinc-

hincque

$$A = \frac{\alpha \beta a}{e(\alpha - \beta)} l \frac{\alpha}{\beta}, \text{ vnde fit}$$

$$\frac{X}{A} = \frac{l \frac{\alpha x - \beta x + \beta a}{\beta a}}{l \frac{\alpha}{\beta}}.$$

Denique cum sit

$$p = V(\lambda x + \mu) = V\left(\frac{e(\alpha - \beta) x + \beta a}{\alpha \beta a}\right),$$

factor constans $V \frac{e}{\alpha \beta a}$ commode in coëfficiente constante C comprehendi potest. His igitur inuentis omnes motus regulares, quos quidem haec chorda recipere potest, in sequenti formula generali continentur:

$$y = C V((\alpha - \beta) x + \beta a) \text{ fin. } i \pi \frac{l \frac{(\alpha - (\beta x + \beta a)}{\beta a}}{l \frac{\alpha}{\beta}} \times$$

$$\times \text{ fin. } (\zeta + t \frac{(\alpha - \beta) V 2 g c^3 (i i \pi \pi + \frac{1}{4} (l \frac{\alpha}{\beta})^2)}{\alpha \beta a l \frac{\alpha}{\beta}}.$$

Quocirca si in hac formula loco i successiue scribantur numeri 1; 2; 3; 4; etc. et singulis literis arbitrariis C et ζ alii valores quicunque tribuantur, qui sint C', ζ'; C''; ζ''; C''', ζ'''; etc. omnes istae formulae in vnam summam collectae dabunt aequationem generalem pro omnibus plane motibus mixtis, quibus ista chorda contremiscere potest. Neque vero propterea haec solutio pro perfecta haberi potest, quoniam neutiquam ad quamuis datam figuram initialem adcommodari potest.

§. 13. In resolutione huius casus insigne paradoxon occurrit: quod in formulis omnes sonos exhibentibus etiam poni posse videtur $i = 0$; hinc enim prodiret sonus editus $\frac{(\alpha - \beta) V \frac{1}{2} g c^3}{\pi \alpha \beta a}$, cum tamen fiat hoc casu $y = 0$.

Ad

Ad hoc autem paradoxon resoluendum spectemus literam i vt infinite paruam, ita vt sinus anguli euanescentis $\frac{i\pi X}{A}$ ipsi angulo aequalis censeri queat; tum vero ne ipsa applicata euanescat, loco C scribatur $\frac{C}{i}$, ita vt iam habeamus:

$$y = \pi C V((\alpha-\beta)x+\beta a)\frac{l\frac{(\alpha-\beta)x+\beta a}{\beta a}}{l\frac{\alpha}{\beta}}\text{ sin. }(\zeta + \frac{t(\alpha-\beta)V\frac{1}{2}gc^2}{\alpha\beta a}).$$

Neque iam vllum dubium esse potest, quin motus vibratorius huic formulae futurus esset conformis, si modo haec formula in statu nostrae chordae locum inuenire posset, vbi assuminus, posito $x = a$ fieri $y = 0$, quod quia in hac formula non euenit, euidens est, talem motum penitus esse excludendum.

Casus tertius

quo assumitur $p = V(\lambda xx + 2\mu x + \nu)$.

§. 14. Hic ergo casus ambos praecedentes in se complectitur: primum scilicet quando $\lambda xx + 2\mu x + \nu$ est quadratum; secundum vero quando $\lambda = 0$; praeterea vero infinite latius patet. Hinc igitur erit

$$X = \int\frac{dx}{pp} = \int\frac{dx}{\lambda xx + 2\mu x + \nu},$$

cuius formulae integratio vel a logarithmis pendet, vel a quadratura circuli, prouti denominator vel habuerit factores reales vel secus, id quod hic notasse sufficit, quandoquidem hoc integrale ipsa litera X designari conueniet. Quod si autem in integrali ponatur $x = a$, habebitur valor literae A, quae ergo in se continebit literas λ, μ et ν. Nunc igitur pro crassitie uu inuenienda, quoniam habemus

$$lp = \tfrac{1}{2}l(\lambda xx + 2\mu x + \nu) \text{ erit } \frac{dp}{pdx} = \frac{\lambda x + \mu}{\lambda xx + 2\mu x + \nu};$$

hinc

hincque porro differentiando

$$\frac{ddp}{pdx^2} - \frac{dp^2}{ppdx^2} = - \frac{\lambda\lambda xx - 2\lambda\mu x + \lambda\nu - 2\mu\mu}{(\lambda xx + 2\mu x + \nu)^2}.$$

Addatur

$$\frac{dp^2}{ppdx^2} = \frac{\lambda\lambda xx + 2\lambda\mu x + \mu\mu}{(\lambda xx + 2\mu x + \nu)^2}$$

et nanciſcemur

$$\frac{ddp}{pdx^2} = \frac{\lambda\nu - \mu\mu}{(\lambda xx + 2\mu x + \nu)^2},$$

quam ob rem pro craſſitie habebimus

$$uu = c^3 k \left(\frac{ii\pi\pi}{AA(\lambda xx + 2\mu x + \nu)^2} - \frac{\lambda\nu + \mu\mu}{(\lambda xx + 2\mu x + \nu)^2} \right).$$

Nunc igitur ponamus $k(ii\pi\pi + (\mu\mu - \lambda\nu)AA) = f$, et habebimus $uu = \frac{c^3 f}{AA(\lambda xx + 2\mu x + \nu)^2}$, qua aequatione lex craſſitiei per totam chordam exprimitur. Ponamus autem vt hactenus $\frac{c^3 f}{AA} = ee$, vt fiat:

$$uu = \frac{ee}{(\lambda xx + 2\mu x + \nu)^2}, \text{ ideoque } u = \frac{e}{\lambda xx + 2\mu x + \nu}.$$

§. 15. Quia hic habemus tres coefficientes λ, μ et ν, eos non ſolum ita definire licebit, vt in vtroque termino craſſities datam obtineat magnitudinem; ſed etiam efficere poterimus, vt chorda quoque in alio loco, veluti puncto medio C, datam nanciſcatur craſſitiem. Statuamus igitur craſſitiem in termino $A = \alpha\alpha$, in altero termino $B = \beta\beta$ et in ipſo chordae medio $C = \gamma\gamma$; hocque modo prodibunt tres ſequentes aequationes:

$$\alpha = \frac{e}{\nu}, \quad \beta = \frac{e}{\lambda aa + 2\mu a + \nu}, \quad \gamma = \frac{e}{\frac{1}{4}\lambda aa + \mu a + \nu}.$$

vnde colligimus ſequentes valores:

$$\nu = \frac{e}{\alpha}; \quad \lambda aa + 2\mu a = \frac{e(\alpha - \beta)}{\alpha\beta};$$

$$\tfrac{1}{4}\lambda aa + \mu a = \frac{e(\alpha - \gamma)}{\alpha\gamma}, \text{ hinc}$$

$$\lambda = \frac{2e}{aa}\left(\frac{\alpha\gamma - 2\alpha\beta + \beta\gamma}{\alpha\beta\gamma}\right); \quad \mu = \frac{e}{2a}\cdot\frac{4\alpha\beta - \alpha\gamma - 3\beta\gamma}{\alpha\beta\gamma}; \quad \nu = \frac{e}{\alpha}.$$

Qui ſinguli valores factorem complectuntur e, quem autem hactenus vidimus ex calculo iterum excedere; ita vt in his valoribus loco e vbique vnitatem ſcribere liceat: quo obſeruato in genere erit craſſities chordae

$$uu = \frac{1}{(\lambda xx + 2\mu x + \nu)^2}.$$

§. 16. Quia igitur poſuimus $\frac{c^3 f}{AA} = ee$, erit $f = \frac{AAee}{c^3}$, hincque porro

$$k = \frac{AAee}{c^3(ii\pi\pi + (\mu\mu - \lambda\nu)AA)};$$

tum vero hinc porro erit tempus vnius vibrationis

$$= \pi\sqrt{\frac{k}{2g}} = \frac{\pi A e}{\sqrt{2gc^3(ii\pi\pi + (\mu\mu - \lambda\nu)AA)}},$$

ideoque ipſe ſonus

$$= \frac{\sqrt{(2gc^3(ii\pi\pi + (\mu\mu - \lambda\nu)AA))}}{\pi A e};$$

in quibus formulis iterum tenendum eſt, vbicunque occurrat litera e, eius loco tuto ſcribi poſſe vnitatem. At vero eſt

$$\mu\mu - \lambda\nu = \frac{16\alpha\alpha\beta\beta - 8\alpha\beta\beta\gamma - 8\alpha\alpha\beta\gamma + \beta\beta\gamma\gamma - 2\alpha\beta\gamma\gamma + \alpha\alpha\gamma\gamma}{4\alpha\alpha\beta\beta\gamma\gamma aa}.$$

Ceterum quia hic quoque omnes ſoni ſimplices per formulas irrationales exprimuntur, nulla inter eos harmonia locum habere poteſt. Et quoniam in genere formulam X euoluere non licet, pro motu et figura chordae haec habebitur aequatio:

$$y = C\sqrt{(\lambda xx + 2\mu x + \nu)}\,\text{ſin.}\frac{i\pi X}{A}\,\text{ſin.}\left(\zeta + t\sqrt{\frac{2g}{t}}\right),$$

hincque ex diuerſis valoribus pro i aſſumtis aequatio generalis omnes plane motus continens facile conſtruetur, vt in caſu praecedente.

§. 17.

§. 17. In his tribus caſibus commode vſu venit, vt pro omnibus valoribus numeri i eadem lex craſſitiei definiri potuerit, vnde deinceps omnes ſeries ſimplices aſſignare licuit. Omnibus autem reliquis caſibus pro p aſſumtis, vbi formulae $\frac{1}{p^4}$ et $\frac{ddp}{pdx^2}$ non communem nanciſcuntur denominatorem, etiam longitudo penduli ſimplicis k non amplius per formulam ſolum numerum i inuoluentem exprimi poteſt; vnde etiam lex craſſitiei, ſcilicet uu, a numero i pendebit, ita vt pro ſingulis ſonis ſimplicibus lex craſſitiei continuo mutaretur. His igitur caſibus tantum pro vnico ſono ſimplici chorda conſtrui poterit, cuius quidem inueſtigatio nulla plane attentione digna eſt cenſenda, quoniam circa tales chordas vnicum tantum ſonum ſimplicem exhibere licet, dum omnes reliqui motus nobis prorſus incogniti eſſent manſuri.

§. 18. His igitur circa ſolutionem Illuſtris *Bernoulli* ingenioſiſſimam perpenſis, conſideremus nunc caſus, quibus ſolutionem perfectam exhibere licet, viſuri, num caſus, quos hic euoluimus, in iis contineantur, nec ne.

Inueſtigatio chordarum
ratione craſſitiei, pro quibus ſolutionem perfectam exhibere licet.

§. 19. Hic igitur totum negotium reducitur ad integrationem completam aequationis fundamentalis differentialis ſecundi gradus, quam principia motus nobis ſuppeditarunt, quae eſt:

$$\frac{uu}{2g}\left(\frac{ddy}{dt^2}\right) = c^3\left(\frac{ddy}{dx^2}\right), \text{ ſiue } \frac{uu}{2gc^3}\left(\frac{ddy}{dt^2}\right) = \frac{ddy}{dx^2},$$

 vbi

vbi quaeritur: quali functione ipsius x craſſities uu exprimi debeat, vt huius aequationis integrale completum per functiones arbitrarias exprimi queat? At vero nulli adhuc alii caſus pro integratione huius aequationis erui potuerunt, niſi qui contineantur in hac forma:

$$y = p\,\Gamma:(ft \pm X) + q\,\Gamma':(ft \pm X)$$
$$+ r\,\Gamma'':(ft \pm X) + s\,\Gamma''':(ft \pm X)$$

vbi characteres functionum Γ, Γ', Γ'', Γ''' etc. ita a ſe inuicem pendent, vt ſit

$$d.\,\Gamma z = dz\,\Gamma' z;\quad d.\,\Gamma' z = dz\,\Gamma'' z;$$
$$d.\,\Gamma'' z = dz\,\Gamma''' z;\ \text{etc.}$$

Hoc ſcilicet modo pro applicata y abſciſſae x reſpondente eiusmodi elicitur functio duarum variabilium x et t, quae omnes plane motus, quibus chorda contremiſcere poteſt, in ſe complectantur; quandoquidem hinc ad quoduis tempus t figura chordae definiri poterit. Quin etiam huiusmodi functiones, quoniam ſunt arbitrariae, ita aſſumi poſſunt, vt pro initio motus, vbi $t = 0$, datum chordae ſtatum producant, ex quo deinceps totus motus ſecuturus determinari queat. Hinc igitur caſus ſimpliciores euoluamus.

Caſus primus

quo ponitur $y = p\,\Gamma:(ft \pm X)$.

§. 20. Quoniam hic X denotat functionem ipſius x tantum, eiusque ſolum differentiale in euolutionem ingreditur, eius loco ſcribamus $\int v\,dx$, vt habeamus hanc formulam: $y = p\,\Gamma:(ft + \int v\,dx)$, cuius differentialia, prout vel t vel x aſſumitur variabile, ſequenti modo erunt

ex-

expreſſa; dum ſcilicet literae p et v ſolam variabilem x in ſe complectuntur:

$$\left(\frac{dy}{dt}\right) = f p \Gamma' \ldots\ldots$$
$$\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{dp}{dx}\Gamma \ldots + p v \Gamma' \ldots$$
$$\left(\frac{ddy}{dt^2}\right) = ffp \Gamma'' \ldots\ldots$$
$$\left(\frac{ddy}{dx^2}\right) = \frac{ddp}{dx^2}\Gamma \ldots + \left(\frac{vdp}{dx} + \frac{d.pv}{dx}\right)\Gamma' \ldots + pvv\Gamma'' \ldots\ldots$$

vbi puncta poſt characteres Γ, Γ'; Γ'', denotant formulam $ft + \int v\,dx$.

§. 21. His igitur valoribus inuentis aequatio propoſita induet ſequentem formam:

$$\frac{ffpuu}{2gc^3}\Gamma'' \ldots = \frac{ddp}{dx^2}\Gamma \ldots + \frac{(vdp + d.pv)}{dx}\Gamma' \ldots + pvv\Gamma'' \ldots\ldots$$

Quare cum tantum ſimiles functiones inter ſe conferri queant, tres aequationes hinc naſcentur:

I. $\frac{ddp}{dx^2} = 0$, II. $v\,dp + d\,pv = 0$, III. $\frac{ffpuu}{2gc^3} = p\,v\,v$.

Ex prima ſtatim colligitur $p = \alpha x + \beta$; ſecunda vero dat $2v\,dp + p\,dv = 0$, quae ducta in p et integrata dat

$$ppv = \gamma, \text{ ideoque } v = \frac{\gamma}{pp} = \frac{\gamma}{(\alpha x + \beta)^2};$$

ex tertia vero aequatione elicimus

$$uu = \frac{2gc^3vv}{ff} = \frac{2gc^3\gamma\gamma}{ff(\alpha x + \beta)^4}.$$

Sicque innoteſcit craſſities uu, pro qua formula integralis aſſumta locum habet.

§. 22. Quoniam quantitas conſtans f pro lubitu accipi poteſt, ſtatuamus $ff = 2gc^3$, ſeu potius loco $2gc^3$ ſcribamus ff, et habebimus $uu \frac{\gamma\gamma}{(\alpha x + \beta)^4}$; ita vt craſſities uu ſit reciproce vt $(\alpha x + \beta)^4$; vnde patet in hoc caſu contineri primum caſum ſolutionis *Bernoullianae*; ita vt

 etiam

etiam pro isto casu solutionem perfectam exhibere liceat; quam igitur vt obtineamus, notasse iuuabit, literam γ tam positiue quam negatiue accipi posse, ita vt sit $v = \frac{\pm\gamma}{(\alpha x+\beta)^2}$; hicque vterque valor seorsim cum functione arbitraria coniungi poterit, ita vt integrale completum pro hac lege crassitiei $uu = \frac{\gamma\gamma}{(\alpha x+\beta)^4}$ sequentem formam sit habiturum:

$$y = (\alpha x+\beta)\Gamma : (ft + \int \frac{\gamma dx}{(\alpha x+\beta)^2}) - (\alpha x+\beta)\Delta \cdot (ft - \int \frac{\gamma dx}{(\alpha x+\beta)^2}).$$

§. 23. Integretur autem formula $\frac{\gamma dx}{(\alpha x+\beta)^2}$ ita, vt euanescat posito $x = 0$, eritque hoc integrale $+ \frac{\gamma x}{\beta(\alpha x+\beta)}$ sicque erit:

$$y = (\alpha x+\beta)\Gamma : (ft + \frac{\gamma x}{\beta(\alpha x+\beta)}) - (\alpha x+\beta)\Delta : (ft - \frac{\gamma x}{\beta(\alpha x+\beta)}),$$

vbi f ex tensione chordae c^3 ita definitur, vt sit $f = \sqrt{2gc^3}$.

§. 24. Nunc igitur ante omnia hanc expressionem generalissimam ad statum nostrae chordae accommodari oportet, quo requiritur: primo vt in ipso termino A, vbi $x = 0$, semper sit $y = 0$; tum vero etiam pro altero termino B, vbi fit $x = a$, pariter perpetuo fit $y = 0$; quare pro priore conditione adimplenda, posito $x = 0$, perpetuo esse debet

$$0 = \beta\Gamma : ft - \beta\Delta : ft, \text{ siue } \Delta : ft = \Gamma : ft;$$

vnde patet, functionem Δ plane congruere debere cum functione Γ, quandoquidem pro eodem valore ft vtraque praebere debet evndem valorem, ideoque loco Δ scribi oportet Γ, ita vt iam nostra aequatio sit:

$$y = (\alpha x+\beta)\Gamma : (ft + \frac{\gamma x}{\beta(\alpha x+\beta)}) - (\alpha x+\beta)\Gamma : (ft - \frac{\gamma x}{\beta(\alpha x+\beta)}),$$

ad quam formam melius intelligendam notetur, functionem quamcunque, veluti $\Gamma : z$, semper lineam curuam pro lubitu

bitu ductam repraesentari posse, cuius singulae applicatae abscissis z respondentes referant functionem ipsam $\Gamma : z$.

§. 25. Pro altera conditione statuamus $x = a$, fierique debebit:

$$0 = (\alpha a + \beta)\Gamma : (ft + \frac{\gamma a}{\beta(\alpha a + \beta)}) - (\alpha a + \beta)\Gamma : (ft - \frac{\gamma a}{\beta(\alpha a + \beta)})$$

vnde prodit aequatio

$$\Gamma : (ft + \frac{\gamma a}{\beta(\alpha a + \beta)}) = \Gamma : (ft - \frac{\gamma a}{\beta(\alpha a + \beta)}),$$

cuius vim quo melius perspiciamus, ponamus

$$ft - \frac{\gamma a}{\beta(\alpha a + \beta)} = z, \text{ vt sit } ft = z + \frac{\gamma a}{\beta(\alpha a + \beta)}$$

atque fieri debebit

$$\Gamma : (z + \frac{2\gamma a}{\beta(\alpha a + \beta)}) = \Gamma z;$$

vnde patet, curuam seu scalam, qua functio γ repraesentatur, ita esse debere comparatam, vt, posito breuitatis gratia $\frac{\gamma a}{\beta(\alpha a + \beta)} = k$, omnibus abscissis

$$z, \; z + 2k, \; z + 4k, \; z + 6k, \; z + 8k, \text{ etc.}$$

eadem semper respondeat applicata. Quamobrem sumto super axe E H interuallo E F $= 2k$, super eo describatur pro lubitu curua $e o f$, quae eadem deinceps per aequalia interualla F G, G H super axe assumta, continuo replicetur, quod quo fieri possit tantum opus est vt applicatae E e et F f aequales statuantur. Praeterea enim descriptio istius curuae $e o f$ penitus a nostro arbitrio pendet, nihilque prorsus refert, siue ea aequatione quapiam comprehendi queat, nec ne; quemadmodum fusius exposui in determinatione generali motuum, quos chordae vniformiter crassae recipere possunt.

Tab. IV. Fig. 2.

§. 26.

§. 26. Tali ergo ſcala conſtituta, noſtrae chordae ad quoduis tempus expedite definiri et pro qualibet abſciſſa x ei reſpondens applicata y aſſignari poterit. Primo enim ſuper axe EFGH capiatur interuallum $ET = ft$, vbi applicata ſit Tt, tum vtrinque ab hoc puncto T abſcindantur interualla aequalia TP et $TQ = \frac{\gamma x}{\beta(\alpha x + \beta)}$, vt habeantur applicatae

$$Pp = \Gamma : (ft + \frac{\gamma x}{\beta(\alpha x + \beta)}) \text{ et } Qq = \Gamma : (ft - \frac{\gamma x}{\beta(\alpha x + \beta)})$$

quocirca ex his duabus applicatis applicata quaeſita y ita determinabitur, vt ſit $y = (\alpha x + \beta)(Pp - Qq)$. Tum vero, quia per interuallum $EF = 2k = \frac{2\gamma a}{\beta(\alpha a + \beta)}$ ſcalam pro lubitu delineare licet, ea ſemper ita conſtrui poterit, vt pro initio, vbi $t = 0$, non ſolum chorda datam obtineat figuram, ſed etiam in ſingulis punctis datum motum nanciſcatur. Hoc igitur caſu, prorſus atque in chordis vniformiter craſſis, ex ſtatu quocunque chordae initiali, totus motus quo deinceps contremiſcet, determinari poterit.

§. 27. Pro motus autem initio, vbi $t = 0$, aequatio noſtra ita ſe habebit:

$$y = (\alpha x + \beta)\Gamma \frac{\gamma x}{\beta(\alpha x + \beta)} - (\alpha x + \beta)\Gamma \frac{\gamma x}{\beta(\alpha x + \beta)},$$

vnde manifeſtum eſt, elapſo tempore t tanto, vt ſit $ft = 2k$, chordam eundem prorſus ſtatum eſſe recuperaturam; quare cum chorda interea duas vibrationes abſoluiſſe cenſeatur, tempus vnius vibrationis erit $= \frac{k}{f} = \frac{\gamma a}{\beta f(\alpha a + \beta)}$, idque in minutis ſecundis expreſſum; vnde ipſe ſonus, ſeu numerus vibrationum vno minuto ſecundo editarum, erit $= \frac{\beta f(\alpha a + \beta)}{\gamma a}$. Fieri vero etiam poteſt vt chorda eodem

tempore

tempore $\frac{k}{f}$ duas pluresue vibrationes abſoluat, quod eueniet, ſi ſcala illa $c\,o\,f$, ſuper interuallo $E\,F = 2\,k$ exſtructa, ex duabus pluribusue partibus inter ſe aequalibus componatur.

§. 28. Nunc igitur penitus euictum eſt, chordas huius ſpeciei, quarum craſſities reciproce proportionalis eſt poteſtati quartae huius formulae: $\alpha\,x + \beta$, ſimili modo ad omnes motus vibratorios eſſe accommodatas, ac chordas vniformiter craſſas, quemadmodum Illuſtris *Bernoulli* aſſeuerauit; atque adeo etiam pro iis ſolutionem aeque perfectam dari poſſe vidimus; ita vt pro quocunque ſtatu initiali, ad quem chorda fuerit perducta, ſemper totus motus, quo chorda deinceps contremiſcet, aſſignari queat; de quo quidem Celeberr. *Bernoulli*, eo ſaltem tempore, vehementer dubitaſſe videtur.

Caſus ſecundus.

quo ponitur $y = p\,\Gamma : (f\,t \pm X) + q\,\Gamma' : (f\,t \pm X)$.

§. 29. Ponamus iterum $X = \int v\,d\,x$, vt habeamus:

$$y = p\,\Gamma : (f\,t + \int v\,d\,x) + q\,\Gamma'\,(f\,t + \int v\,d\,x),$$

et quia p, q, v ſunt functiones ipſius x tantum, fiet bis differentiando

$$\left(\frac{d\,d\,y}{d\,t^2}\right) = f\,f\,p\,\Gamma'' \,\ldots\ldots + f\,f\,q\,\Gamma''' \,\ldots\ldots$$

Deinde poſita ſola x variabili erit

$$\left(\frac{d\,d\,y}{d\,x^2}\right) = \left(\frac{d\,d\,p}{d\,x^2}\right)\Gamma \ldots + \left(\frac{2\,v\,d\,p + p\,d\,v}{d\,x}\right)\Gamma' \ldots$$
$$+ p\,v\,v\,\Gamma''' + q\,v\,v\,\Gamma'''' \ldots$$
$$+ \left(\frac{d\,d\,q}{d\,x^2}\right)\Gamma' \ldots + \left(\frac{2\,v\,d\,q + q\,d\,v}{d\,x}\right)\Gamma'',$$

quae formula quia poſito $ff = 2\,g\,c^3$ iterum aequalis esſe debet huic:

$$p\,u\,u\,\Gamma'' \ldots \ldots q\,u\,u\,\Gamma''' \ldots \ldots$$

habebimus ſequentes aequationes:

$$\text{I. } \left(\frac{d\,d\,p}{d\,x^2}\right) = 0. \quad \text{II. } 2\,v\,d\,p + p\,d\,v + \left(\frac{d\,d\,q}{d\,x}\right) = 0.$$

$$\text{III. } p\,v\,v + \frac{2\,v\,d\,q + q\,d\,v}{d\,x} = p\,u\,u. \quad \text{IV. } q\,v\,v = q\,u\,u$$

ex quarum prima ſtatim colligitur $p = \alpha\,x + \beta$, ex quarta vero $u\,u = v\,v$, qui valores in binis reliquis ſubſtituti dabunt

$$\text{II. } 2\,\alpha\,v\,d\,x + (\alpha\,x + \beta)\,d\,v + \frac{d\,d\,q}{d\,x} = 0.$$

$$\text{III. } (\alpha\,x + \beta)\,v\,v + \frac{2\,v\,d\,q + q\,d\,v}{d\,x} = (\alpha\,x + \beta)\,v\,v,$$

vnde fit $2\,v\,d\,q + q\,d\,v = 0$, hincque $q\,q\,v = \gamma$, ideoque $v = \frac{\gamma}{q\,q}$, qui valor in ſecunda ſubſtitutus praebet

$$\frac{2\,\alpha\,\gamma\,d\,x}{q\,q} - \frac{2\,(\alpha\,x + \beta)\,\gamma\,d\,q}{q^3} + \frac{d\,d\,q}{d\,x} = 0,$$

ſiue

$$2\,\alpha\,\gamma\,q\,d\,x - 2\,\gamma\,(\alpha\,x + \beta)\,d\,q + \frac{q^3\,d\,d\,q}{d\,x} = 0.$$

§. 30. Quo haec aequatio ſimplicior reddatur, retineamus in calculo literam $p = \alpha\,x + \beta$, vt ſit $d\,x = \frac{d\,p}{\alpha}$, et poſtrema aequatio hanc induet formam:

$$2\,\gamma\,q\,d\,p - 2\,\gamma\,p\,d\,q + \frac{\alpha\,q^3\,d\,d\,q}{d\,p} = 0,$$

cui facile intelligitur ſatisfieri poſſe, dum q certae poteſtati ipſius p aequatur. Ponatur igitur $q = \delta\,p^n$, erit

$dq = \delta n p^{n-1} dp$ et $ddq = \delta\, 2(n-1) p^{n-2} dp^2$,
atque hinc orietur iſta forma:

$$2\gamma\delta p^n - 2\gamma\delta n p^n + \alpha\delta^4 n(n-1) p^{4n-2} = 0.$$

Fiat igitur $n = 4n - 2$, vt poteſtates ipſius p egrediantur, eritque $n = \frac{2}{3}$, quo facto prodibit $\frac{2}{3}\gamma - \frac{2}{9}\alpha\delta^3 = 0$, vnde colligitur $\gamma = \frac{1}{3}\alpha\delta^3$; ſicque habetur ſolutio maxime ſpecialis, quoniam nulla noua conſtans in calculum eſt ingreſſa. Interim tamen operae pretium erit hanc ſolutionem expedire. Cum igitur ſit $V = \frac{1}{3}\alpha\delta^3$, erit $q = \delta p^{\frac{2}{3}} = \delta(\alpha x + \beta)^{\frac{2}{3}}$, vnde porro fit $v = \frac{\alpha\delta}{3(\alpha x + \beta)^{\frac{4}{3}}}$, ex qua expreſſione, cum ſit $uu = vv$, lex craſſitiei definitur. Erit enim $uu = \frac{\alpha\alpha\delta\delta}{9(\alpha x + \beta)^{\frac{8}{3}}}$, ita vt craſſities vbique ſit reciproce vt poteſtas $(\alpha x + \beta)^{\frac{8}{3}}$, qui ergo caſus prorſus diſcrepat ab iis, quos ex formula *Bernoulliana* deduximus.

§. 31. Conſideremus igitur chordam ita comparatam vti inuenimus, vt ſcilicet ſit eius craſſities

$$uu = \frac{\alpha\alpha\delta\delta}{9(\alpha x + \beta)^{\frac{4}{3}}},$$

et quia inuenimus $vv = uu$, erit

$$v = + \frac{\alpha\delta}{3(\alpha x + \beta)^{\frac{4}{3}}}, \text{ atque } q = \delta(\alpha x + \beta)^{\frac{2}{3}}.$$

In his autem formulis quantitas δ tam negatiue quam

 poſi-

poſitiue accipi poteſt, quandoquidem hoc modo craſſities immutata manet; ſicque hinc geminae determinationes obtinentur, prouti δ vel poſitiue vel negatiue accipitur. Priore ſcilicet caſu erit

$$v = \frac{\alpha\,\delta}{3\,(\alpha\,x + \beta)^{\frac{4}{3}}} \text{ et } q = \delta\,(\alpha\,x + \beta)^{\frac{1}{3}},$$

poſteriore vero caſu erit

$$v = \frac{-\,\alpha\,\delta}{3\,(\alpha\,x + \beta)^{\frac{4}{3}}} \text{ et } q = -\,\delta\,(\alpha\,x + \beta)^{\frac{1}{3}}.$$

§. 32. Hinc ergo pro applicata y duos nanciſcimur valores, qui in genere coniuncti integrale completum exhibent, ita vt habeamus:

$$\begin{aligned} y = {} & (\alpha\,x + \beta)\,\Gamma : \left(f\,t + \int \frac{\alpha\,\delta\,d\,x}{3\,(\alpha\,x + \beta)^{\frac{4}{3}}}\right) \\ & + \delta\,(\alpha\,x + \beta)^{\frac{2}{3}}\,\Gamma' : \left(f\,t + \int \frac{\alpha\,\delta\,d\,x}{3\,(\alpha\,x + \beta)^{\frac{4}{3}}}\right) \\ & - (\alpha\,x + \beta)\,\Delta : \left(f\,t - \int \frac{\alpha\,\delta\,d\,x}{3\,(\alpha\,x + \beta)^{\frac{4}{3}}}\right) \\ & + \delta\,(\alpha\,x + \beta)^{\frac{2}{3}}\,\Delta' : \left(f\,t - \int \frac{\alpha\,\delta\,d\,x}{3\,(\alpha\,x + \beta)^{\frac{4}{3}}}\right), \end{aligned}$$

quae forma continet integrale completum, quoniam duas functiones arbitrarias Γ et Δ inuoluit. Valet autem pro caſu quo craſſities chordae eſt

$$uu = \frac{\alpha\alpha\delta\delta}{9(\alpha x + \beta)^{\frac{8}{3}}}.$$

Tum vero eſt $f = \sqrt{2gc^1}$, vbi c^1 denotat tenſionem chordae. Formula autem integralis, quae hic occurrit eſt

$$\int \frac{\alpha\delta dx}{3(\alpha x + \beta)^{\frac{4}{3}}} = \frac{-\delta}{(\alpha x + \beta)^{\frac{1}{3}}} + \frac{\delta}{\beta^{\frac{1}{3}}}$$

$$= \delta \left(\frac{\sqrt[3]{(\alpha x + \beta)} - \sqrt[3]{\beta}}{\sqrt[3]{\beta(\alpha x + \beta)}} \right),$$

quod integrale ita ſumſimus, vt euaneſcat poſito $x = 0$. Quodſi ergo hoc ipſum integrale litera X deſignemus, vt ſit $X = \frac{\delta}{\sqrt[3]{\beta}} - \frac{\delta}{\sqrt[3]{(\alpha x + \beta)}}$, formula noſtra generalis erit:

$$y = (\alpha x + \beta)\Gamma : (ft + X) + \delta(\alpha x + \beta)^{\frac{2}{3}}\Gamma' : (ft + X)$$
$$- (\alpha x + \beta)\Delta : (ft - X) + \delta(\alpha x + \beta)^{\frac{2}{3}}\Delta' : (ft - X)$$

§. 33. Applicemus igitur hanc formulam ad ſtatum noſtrae chordae, quo ea in punctis B et A fixa ſupponitur. Primo igitur, poſito $x = 0$, vnde etiam fit $X = 0$, requiritur vt fiat

$$0 = \beta\Gamma : ft + \delta\beta^{\frac{2}{3}}\Gamma' : ft - \beta\Delta : ft + \delta\beta^{\frac{2}{3}}\Delta' ft,$$

vnde patet, hic non amplius aequalitatem functionum Γ et Δ locum habere, vt praecedente caſu vſu venit. Praeterea vero, poſito $x = a$, fiat $X = A$, ita vt ſit

$$A = \frac{\delta}{\sqrt[3]{\beta}} - \frac{\delta}{\sqrt[3]{(\alpha a + \beta)}},$$

atque haec inſuper conditio adimpleri debebit, vt ſit:

$$o = (\alpha a + \beta)\,\Gamma : (ft + A) + \delta\,(\alpha a + \beta)^{\frac{2}{3}}\,\Gamma' : (ft + A)$$
$$- (\alpha a + \beta)\,\Delta : (ft - A) + \delta\,(\alpha a + \beta)^{\frac{2}{3}}\,\Delta' : (ft - A)$$

atque ex his duabus conditionibus tam indoles vtriusque functionis Γ et Δ, quam continuatio ſcalarum quae has functiones repraeſentant, definiri debet.

§. 34. Priore conditione, qua eſſe debet

$$\Gamma : z - \Delta : z + \frac{\delta}{\sqrt[3]{\beta}}\,\Gamma' : z + \frac{\delta}{\sqrt[3]{\beta}}\,\Delta' : z = o, \text{ ſiue}$$

$$\Delta : z - \Gamma\,z = \frac{\delta}{\sqrt[3]{\beta}}\,(\Gamma'\,z + \Delta' : z),$$

praeſcribitur certa relatio inter ambas functiones Γ et Δ, ad quam inueſtigandam, poſito breuitatis gratia $\frac{\delta}{\sqrt[3]{\beta}} = \lambda$, ſtatuamus

$$\Delta : z - \Gamma : z = \lambda\,(\Gamma' : z + \Delta' : z) = 2\,\lambda\,\Theta'\,z$$

vt ſit $\Gamma' : z + \Delta'\,z = 2\,\Theta'\,z$, vnde fit integrando

$$\Gamma : z + \Delta : z = 2\,\Theta : z.$$

Cum igitur ſit

$$\Delta\,z - \Gamma : z = 2\,\lambda\,\Theta' : z$$

inde colligitur:

$$\Gamma : z = \Theta : z - \lambda\,\Theta' : z \text{ et } \Delta\,z = \Theta\,z + \lambda\,\Theta' : z$$

hincque porro

$$\Gamma' : z = \Theta'\,z - \lambda\,\Theta''\,z \text{ et } \Delta' : z = \Theta' : z + \lambda\,\Theta'' : z$$

ſicque ambae functiones Γ et Δ ad nouam functionem Θ ſunt reductae; quocirca noſtra aequatio generalis induet hanc formam:

$y =$

$$y = (\alpha x + \beta)\,\Theta : (ft + X) - \frac{\delta(\alpha x + \beta)^{\frac{2}{3}}}{\sqrt[3]{\beta}} (\sqrt[3]{(\alpha x + \beta)} - \sqrt[3]{\beta}) \times$$

$$\times\, \Theta' : (ft + X) - \frac{\delta\delta}{\sqrt[3]{\beta}} (\alpha x + \beta)^{\frac{2}{3}}\, \Theta'' : (ft + X)$$

$$- (\alpha x + \beta)\,\Theta : (ft - X) - \frac{\delta(\alpha x + \beta)^{\frac{2}{3}}}{\sqrt[3]{\beta}} \times$$

$$\times (\sqrt[3]{(\alpha x + \beta)} - \sqrt[3]{\beta})\, \Theta' : (ft - x) + \frac{\delta\delta}{\sqrt[3]{\beta}} (\alpha x + \beta)^{\frac{2}{3}}\, \Theta'' : (ft + X)$$

§. 35. Progrediamur igitur ad alteram conditionem, qua poſito $x = a$ etiam fieri debet $y = 0$; tum autem fiat $X = A$: ac ſtatuamus breuitatis gratia

$$\frac{\delta(\alpha a + \beta)^{\frac{2}{3}}}{\sqrt[3]{\beta}} (\sqrt[3]{(\alpha a + \beta)} - \sqrt[3]{\beta}) = B(\alpha a + \beta) \text{ et}$$

$$\frac{\delta\delta}{\sqrt[3]{\beta}} (\alpha a + \beta^{\frac{2}{3}}) = C(\alpha a + \beta),$$

atque haec conditio poſtulat vt ſit

$$0 = \Theta : (ft + A) - B\,\Theta' : (ft + A) - C\,\Theta'' : (ft + A)$$
$$- \Theta : (ft - A) - B\,\Theta' : (ft - A) + C\,\Theta'' : (ft - A).$$

Ponamus hic $ft - A = z$, eritque $ft + A = z + 2A$, ita vt eſſe debeat:

$$\Theta : (z + 2A) - B\,\Theta' : (z + 2A) - C\,\Theta'' : (z + 2A)$$
$$= \Theta : z + B\,\Theta' : z - C\,\Theta'' : z,$$

ex qua conditione continuatio ſcalarum pro functionibus

Θ,

Θ, Θ', Θ'' peti debet. Ex iis enim, quae de chordis aequaliter craſſis ſunt tradita, intelligitur, ſuper axe per interuallam $= 2\,A$ curuam quamcunque pro lubitu deſcribi poſſe, cuius applicatae referant functionem $\Theta : z$, quae ſcilicet abſciſſis z reſpondeant; tum enim ex hac curua facile conſtruentur eae, quibus functiones $\Theta' z$ et $\Theta'' : z$ referuntur. Sicque iſtae functiones $\Theta : z$, $\Theta' : z$ et $\Theta'' : z$, repraeſentabuntur pro omnibus abſciſſis z, minoribus quam $2\,A$. At vero pro maioribus abſciſſis continuatio harum ſcalarum ita debet inſtitui, vt illi conditioni poſteriori ſatisfiat.

§. 36. Hic igitur ſtatim perſpicitur, non amplius fore $\Theta : (z + 2\,A) = \Theta\, z$, vti in chordis ordinariis vſu venit, ideoque continuatas portiones harum ſcalarum a portione principali eſſe diſcrepaturas; quamobrem ad hanc diſcrepantiam explorandam introducamus nouam functionem Λ, ac ſtatuamus

$$\Theta : (z + 2\,A) = \Theta : z + \Lambda : z, \text{ eritque}$$

$$\Theta' : (z + 2\,A) = \Theta' : z + \Lambda' : z \text{ et}$$

$$\Theta'' : (z + 2\,A) = \Theta'' : z + \Lambda'' : z;$$

quibus valoribus introductis habebimus

$$\Lambda : z - B\,\Lambda' : z - C\,\Lambda'' : z = 2\,B\,\Theta' : z,$$

cui aequationi quo facilius ſatisfieri poſſit, ſtatuamus

$$\Lambda : z = 2\,B\,\Pi' : z, \text{ vt fiat}$$

$$\Theta' : z = \Pi' : z - B\,\Pi'' : z - C\,\Pi''' : z,$$

vnde fit integrando

$$\Theta : z = \Pi : z - B\,\Pi' : z - C\,\Pi'' : z, \text{ et}$$

Θ''

$$\Theta'' : z = \Pi'' : z - B\,\Pi''' : z - C\,\Pi'''' : z.$$

Deinde vero pro continuatione erit

$$\Theta : (z + 2A) = \Theta : z + 2B\,\Pi' : z, \text{ siue}$$

$$\Theta : (z + 2A) = \Pi z + B\,\Pi' : z - C\,\Pi'' : z,$$

hincque porro

$$\Theta' (z + 2A) = \Pi' : z + B\,\Pi'' : z - C\,\Pi''' : z \text{ et}$$

$$\Theta'' : (z + 2A) = \Pi'' : z + B\,\Pi''' : z - C\,\Pi'''' : z.$$

Sicque totum negotium iam huc eſt perductum: vt, conſtituta pro lubitu ſcala, functionem $\Pi : z$ referente, pro abſciſſis z, terminum $2A$ non ſuperantibus, hincque conſtructis ſcalis pro functionibus deriuatis $\Pi' : z$, $\Pi'' : z$, $\Pi''' : z$, $\Pi'''' : z$. inde ſcalae ante memoratae pro functionibus $\Theta : z$, $\Theta' : z$, $\Theta'' : z$ exſtrui queant, vsque ad abſciſſam $z = 2A$, quae deinceps per formulas modo datas

$$\Theta : (z + 2A),\ \Theta' (z + 2A),\ \Theta'' : (z + 2A), \text{ etc.}$$

continuo vsque ad maiores abſciſſas continuari poſſunt. Hocque modo omnes plane motus, quos chorda talis recipere poteſt, ita definiri poterunt, vt etiam ad quemuis ſtatum initialem accommodari queant. Caeterum hic non eſt diffitendum, hanc conſtructionem maxime eſſe operoſam: verum pro inſtituto praeſente ſufficiet poſſibilitatem ſolutionis perfectae oſtendiſſe.

§. 37. Quae autem hic ſunt tradita tantum ad caſum maxime particularem pertinent, quandoquidem pro aequatione differentiali ſecundi gradus ad quam fuimus perducti, quae erat

$$q\,dp - p\,dq = \frac{\alpha q^3\,ddq}{2\gamma\,dp},$$

tantum eius integrale ſpecialiſſimum $q = \delta p^{\frac{2}{3}}$ aſſumſimus; quamobrem operae pretium erit inueſtigare, num iſtius aequationis integrale completum reperire liceat, nec ne. Quoniam igitur huic aequationi ſatisfacit valor $p^{\frac{2}{3}}$ pro q aſſumtus, vnde $\frac{dq}{dp}$ tali formulae: $\frac{1}{p^{\frac{1}{3}}}$ proportionalis eſt: ſtatuamus pro integrali completo inueſtigando

$$q = p^{\frac{2}{3}} r, \quad \text{et} \quad \frac{dq}{dp} = \frac{s}{p^{\frac{1}{3}}}.$$

Ex priore aequatione fiet $dq = p^{\frac{2}{3}} dr + p^{-\frac{1}{3}} r\, dp$, quae ergo expreſſio aequari debet huic: $s p^{-\frac{1}{3}} dp$, vnde ſequitur fore $\frac{dp}{p} = \frac{3\,dr}{3s - 2r}$.

§. 38. Quodſi autem hos valores in ipſa noſtra aequatione ſubſtituamus, pro qua ob dp conſtans aſſumtum ſit

$$\frac{ddq}{dp} = \frac{d.\,dq}{dp} = \frac{ds}{p^{\frac{1}{3}}} - \frac{1}{3} \frac{s\,dp}{p^{\frac{4}{3}}},$$

loco $\frac{\alpha}{2\gamma}$ ſcribendo literam n, illa aequatio hanc induet formam:

$$p^{\frac{2}{3}} r\,dp - p^{\frac{2}{3}} s\,dp = n p p r^3 \left(\frac{ds}{p^{\frac{1}{3}}} - \frac{s\,dp}{3 p^{\frac{4}{3}}} \right)$$

$$= n r^3 \left(p^{\frac{5}{3}} ds - \frac{1}{3} p^{\frac{2}{3}} s\,dp \right),$$

quae aequatio per $p^{\frac{2}{3}}$ diuiſa dat

$$r\,dp - s\,dp = n\,r^3 p\,ds - \tfrac{1}{3} n\,r^3 s\,dp,$$

vnde colligimus

$$\frac{dp}{p} = \frac{3n\,r^3\,ds}{3r - 3s + n\,r^3 s}.$$

Hi igitur valores pro $\frac{dp}{p}$ inuenti nobis ſuppeditant hanc aequationem differentialem primi gradus inter r et s:

$$3n\,r^3 s\,ds - 2n\,r^4 ds - n\,r^3 s\,dr = 3r\,dr - 3s\,dr,$$

ſiue

$$3s\,ds - 2r\,ds - s\,dr = \frac{3(r-s)\,dr}{n\,r^3},$$

quae, poſito $r - s = t$, vt ſit $s = r - t$, reducitur ad hanc formam ſimpliciorem:

$$-r\,dt - 2t\,dr + 3t\,dt = \frac{3t\,dr}{n\,r^3},$$

cuius quidem membrum prius integrabile redditur multiplicatum per $r - t = s$, ita vt prior forma hoc modo poſſit exhiberi:

$$d.\,s^3 - rss = \frac{3s(r-s)\,dr}{n\,r^3},$$

ſiue etiam

$$\frac{d.\,s^3 - rss}{s^3 - rss} = \frac{3s(r-s)\,dr}{n\,r^3(s^3 - rss)}, = \frac{-3\,dr}{n\,r^3 s}.$$

Quomodocunque autem haec aequatio tractetur, eius integratio omnes vires Analyſeos fruſtrari videtur.

§. 39. Multo minus integratio generalis ſuccedet, ſi pro valore ipſius y adhuc plures terminos aſſumere vellemus, veluti

$$y = p\Gamma:(ft \pm X) + q\Gamma'(ft \pm X) + r\Gamma'':(ft \pm X).$$

Integralia autem particularia pro determinatione craſſitiei ſequerentur caſus integrabiles aequationis *Riccatianae*, quemadmodum iam dudum eſt obſeruatum, vnde perſpicitur: binos caſus poſteriores, quos ex ſolutione *Bernoulliana* deduximus neutiquam ad iſtos caſus referri poſſe; quamobrem illi tanto maiore attentione digni ſunt cenſendi.

DE

DE MOTV PENDVLI CIRCA AXEM CYLINDRICVM, FVLCRO DATAE FIGVRAE INCVMBENTEM, MOBILIS. REMOTA FRICTIONE.

Dissertatio prior.

Auctore

L. EVLERO.

§. 1.

Considero hic pendulum, compositum ex axe cylindrico A A B B, cui firmiter connexum sit in medio ipsum corpus penduli E D F figurae cuiuscunque; in quo sit punctum G centrum grauitatis totius penduli compositi, vnde ad axem cylindri ducta sit normalis G C, quam distantiam vocemus G C $= c$; praeterea vero denotet M massam seu pendus totius huius penduli, ex cylindro A B A B et mole E D F compositi; tum vero per centrum grauitatis G ducta concipiatur recta I K axi cylindri parallela, cuius respectu sit momentum inertiae totius penduli $= M k k$, quod scilicet reperitur, si singula penduli elementa, quatenus ex ma- Tab. IV. Fig. 3.

 teria

teria conſtant, in quadrata diſtantiarum ſuarum ab iſta recta I K multiplicentur et omnia haec producta in vnam ſummam colligantur.

§. 2. Iam axis cylindricus huius penduli A B A B vtroque termino A et A ita duobus fulcris fixis vtrinque aequalibus incumbat, vt perpetuo maneat horizontalis, ita vt iſtud pendulum, circa axem cylindricum his fulcris incumbentem, libere oſcillationes peragere queat, dum perpetuo ab ambobus fulcris pariter manet remotum, ac propterea preſſio in ambo fulcra vtrinque aequalis ſpectari poterit. Motum autem huius penduli eatenus tantum hic perſcrutari conſtitui, quatenus eius oſcillationes ſunt quam minimae, quandoquidem oſcillationes maiores in calculos nimis moleſtos praecipitarent.

Tab. IV. Fig. 4. §. 3. Conſideremus nunc primo pendulum noſtrum in ſtatu naturali, in quo perpetuo acquieſcere queat; vbi tabula referat planum verticale axem cylindri normaliter traiiciens, ſitque M A N figura fulcri, cui axis cylindri A B ex vna parte incumbat, dum ex altera parte ſimili fulcro incumbit; vtrumque autem fulcrum M A N excauatum ſit in curuaturam circularem, cuius centrum ſit in O, eiusque radius vocetur A O $= a$; circulus vero A B referat ſectionem transuerſam verticalem axis cylindrici, circa quem pendulum eſt mobile, cuius centrum ſit in puncto C, et radius A C $=$ C B $= b$. In ſtatu igitur aequilibrii, ſeu quietis, iſte axis incumbet fulcri puncto imo A, per quod ſi recta verticalis O C A producatur, in ea reperiatur neceſſe eſt centrum grauitatis totius penduli G, exiſtente diſtantia

C G $=$

$CG = c$, vti ſupra poſuimus; ſicque ſtatus aequilibrii noſtri penduli perfecte erit determinatus.

§. 4. Deſcripto hoc ſtatu aequilibrii concipiamus iſti pendulo imprimi motum quemcunque quam minimum, vt ſcilicet inde oriantur oſcillationes quaſi infinite paruae. Ad hunc autem motum nobis rite repraeſentandum, primo ſpectari debet motus ipſi centro grauitatis G impreſſus, cuius directio ſit recta horizontalis Gg, ſecundum quam id primum moueri incipiat, cuius celeritatem ponamus $= n$, quam ergo quaſi infinite paruam ſpectari oportet; praeterea vero ponamus toti pendulo ſimul motum quempiam angularem imprimi circa axem illum IK horizontalem, qui hic plano tabulae normaliter inſiſtere concipi debet; iſte vero motus angularis pariter ſit quam minimus, ac vocetur $= \nu$. Hic notetur, litteram n denotare ſpatium, quod a celeritate centro grauitatis impreſſa vno minuto ſecundo percurri poſſet. Simili modo celeritas angularis ν exhibibit angulum, quem motus angularis impreſſus vno minuto ſecundo eſſet confecturus. Poſtquam igitur talis duplex motus pendulo fuerit impreſſus, inueſtigari debet totus motus, quo iſtud pendulum deinceps agitabitur.

§. 5. Nunc elapſo tempore quocunque, quod in minutis ſecundis expreſſum ſit $= t$, peruenerit centrum grauitatis totius penduli ex G in g, vnde ad rectam verticalem agatur horizontalis gp, pro quo ſitu vocentur coordinatae $Op = x$ et $pg = y$; vbi notetur primo initio fuiſſe $x = a + c - b$ et $y = 0$. Nunc vero axis cylindricus penduli fulcro incumbat in puncto a, vnde ad centrum fulcri O ducta recta aO, ea ſimul per axem cylindri c tranſibit,

Tab. IV. Fig. 5.

sibit, eritque $a o = a$ et $a c = b$, angulus vero $A O a$ vocetur $= \theta$, qui ergo erit quantitas variabilis; vnde cum sit $c O = a - b$, si ex c ducatur horizontalis $c q$, erit

$$c q = (a - b) \text{ fin. } \theta \text{ et } O q = (a - b) \text{ cof. } \theta.$$

Deinde recta $c g = c$ producatur vsque in h, vbi verticalem $O G$ interfecet in h, voceturque angulus $A h g = \Phi$, qui indicat, quantum situs penduli a situ naturali declinet, cuius ratio ad angulum θ sequenti modo definiri poterit. Cum sit $O p = x$ et $O q = (a - b)$ cof. θ, erit interuallum $p q = x - (a - b)$ cof. θ; tum vero erit

$$p g - q c = y - (a - b) \text{ fin. } \theta;$$

sicque ob

$$c g^2 = p q^2 + (p g - q c)^2$$

iam habebitur ista aequatio:

$$c c = (x - (a - b) \text{ cof. } \theta)^2 + (y - (a - b) \text{ fin. } \theta)^2$$

siue

$$c c = x x + y y - 2 (a - b)(x \text{ cof. } \theta + y \text{ fin. } \theta) + (a - b)^2$$

qua aequatione relatio inter ternas variabiles x, y et θ determinatur; praeterea vero pro angulo Φ manifestum est fore

$$\text{tang. } \Phi = \frac{p g - q c}{p q} = \frac{y - (a - b) \text{ fin. } \theta}{x - (a - b) \text{ cof. } \theta}, \text{ hincque}$$

$$\text{fin. } \Phi = \frac{y - (a - b) \text{ fin. } \theta}{c} \text{ et cof. } \theta = \frac{x - (a - b) \text{ cof. } \theta}{c}.$$

His igitur aequationibus quatuor variabiles in calculum introductae, x et y, cum angulis θ et Φ, ad duas reuocantur.

§. 6. Definito igitur statu, quem pendulum elapso tempore $= t$ tenebit, vt in eius motum inquiramus, omnes vires, quibus sollicitatur, probe perpendi oportet. Primo autem

autem totum pendulum a propria vi grauitatis vrgetur, cuius pondus cum positum sit $= M$, tota haec vis eundem praestabit effectum, ac si ipsi centro grauitatis g in directione verticali gf vis esset applicata $gf = M$. Deinde cum axis cylindricus penduli a fulcro sustentetur in puncto a, vtique ipsum fulcrum hic certam sustinebit vim, qua pendulum vicissim ob reactionem a fulcro quasi repelli est censendum, cuius vis directio erit normalis ad contactum, ideoque secundum directionem ac sollicitabit; ipsa autem haec vis etiamnunc est incognita, ac demum ex euolutione motus cognosci poterit. Statuatur igitur ista vis, seu pressio incognita, in directione ac vrgens $= \Pi$; ita vt nostrum pendulum reuera a duabus viribus sollicitari sit censendum: priore scilicet in directione gf vi $= M$; posteriore vero in directione ac vi $= \Pi$, siquidem animum a frictione abstrahamus. Si enim adesset frictio in contactu a, et cylindrus super fulcro reperet versus N, insuper vis retro versus A vrgens esset introducenda, ipsi pressioni Π proportionalis; at vero frictionis considerationem in praesenti inuestigatione remoueamus.

§. 7. Constitutis viribus, quibus nostrum pendulum agitatur, ipsa motus determinatio ad duo capita reuocatur. Primo enim motus ipsius centri grauitatis debet inuestigari, quo facto insuper motus angularis, quo pendulum circa suum axem I K (fig. 3.) conuertitur, exquiri debebit. Quod igitur primo ad motum centri grauitatis attinet, quoniam vis prior M iam in puncto g est applicata, etiam altera vis Π in sua directione in ipsum punctum g est transferenda, quae secundum directiones coordinatarum resoluta dabit vim verticalem secundum pO siue $g\zeta = \Pi \cos. \theta$

 et

et horizontalem ſecundum $gp = \Pi$ ſin. θ, ita vt punctum g verticaliter deorſum vrgeatur vi $= M - \Pi$ coſ. θ, horizontaliter autem ſecundum gp vi $= \Pi$ ſin. θ.

§. 8. Cum igitur celeritas verticalis centri grauitatis g ſit $= \frac{dx}{dt}$, celeritas autem horizontalis ſecundum $gp = \frac{dy}{dt}$, ſumto elemento temporis dt conſtante, accelerationes ſecundum has directiones erunt $\frac{ddx}{dt^2}$ et $\frac{ddy}{dt^2}$, quas per maſſam totius penduli M multiplicari oportet, vt producta aequentur viribus acceleratricibus ductis in $2g$, denotante g altitudinem lapſus grauium vno minuto ſecundo. Hinc igitur nanciſcemur duas ſequentes aequationes:

1°. $M\frac{ddx}{dt^2} = 2g(M - \Pi \text{ coſ. } \theta)$ et

2°. $M\frac{ddy}{dt^2} = -2g\Pi \text{ ſin. } \theta$

in quibus cum inſit vis incognita Π, ea eliminata ſuper erit vna aequatio

$$M\left(\frac{ddx \text{ ſin. } \theta - ddy \text{ coſ. } \theta}{dt^2}\right) = 2gM \text{ ſin. } \theta,$$

hincque per M diuidendo habebimus

$$\frac{ddx \text{ ſin. } \theta - ddy \text{ coſ. } \theta}{dt^2} = 2g \text{ ſin. } \theta.$$

§. 9. Deinde pro motu angulari, quoniam pendulum a ſitu naturali iam declinatum reperitur angulo $Ghg = \Phi$, eius celeritas angularis in ſenſum Gg erit $= \frac{d\Phi}{dt}$, hincque eius acceleratio in evndem ſenſum $= \frac{dd\Phi}{dt^2}$, quae per ipſum momentum inertiae totius penduli, quod eſt Mkk, multiplicari, tum vero aequari debet momento virium ſollicitantium reſpectu axis IK (fig. 3.) pariter ducto in $2g$. Quoniam autem vis grauitatis M per ipſum punctum

tum g tranſit, eius momentum erit nullum; alterius autem vis Π, quae puncto c applicata ſecundum $c\,O$ agit, eius momentum reſpectu puncti g erit $=\Pi . cg .\,\text{ſin.}\, Och$. Quia igitur angulus $Och = \Phi - \theta$, erit iſtud momentum $= \Pi\, c\, \text{ſin.}\, (\Phi - \theta)$, quod tendit ad angulum obliquitatis Φ diminuendum, vnde obtinebitur ſequens aequatio:

$$M \frac{kk\,dd\Phi}{dt^2} = -2\,g\,\Pi\, c\, \text{ſin.}\, (\Phi - \theta),$$

quae aequatio iterum continet vim incognitam Π, quae autem ope binarum aequationum ante inuentarum facile elidi poterit. Cum enim ex illis fiat

$$M \left(\frac{ddx\,\text{coſ.}\,\theta + ddy\,\text{ſin.}\,\theta}{dt^2}\right) = 2\,g\,(M\,\text{coſ.}\,\theta - \Pi),$$

erit

$$\Pi = M\,\text{coſ.}\,\theta - M \left(\frac{ddx\,\text{coſ.}\,\theta + ddy\,\text{ſin.}\,\theta}{2\,g\,dt^2}\right)$$

quo valore ſubſtituto et per maſſam M diuiſione facta haec poſtrema aequatio hanc induet formam:

$$\frac{kk\,dd\Phi}{dt^2} = -2\,gc\,\text{coſ.}\,\theta\,\text{ſin.}\,(\Phi - \theta) + c\,\text{ſin.}\,(\Phi - \theta) \left(\frac{ddx\,\text{coſ.}\,\theta + ddy\,\text{ſin.}\,\theta}{dt^2}\right).$$

§. 10. Vniuerſa ergo motus determinatio, etiam preſſione incognita Π, perducta eſt ad duas ſequentes aequationes:

1°. $ddx\,\text{ſin.}\,\theta - ddy\,\text{coſ.}\,\theta = 2\,g\,dt^2\,\text{ſin.}\,\theta$

2°. $c\,\text{ſin.}\,(\Phi - \theta)\,(ddx\,\text{coſ.}\,\theta + ddy\,\text{ſin.}\,\theta) = kk\,dd\Phi + 2\,g\,c\,dt^2\,\text{coſ.}\,\theta\,\text{ſin.}\,(\Phi - \theta)$.

Cum his autem duabus aequationibus coniungi debent binae conditiones iam ſupra repertae, quae erant:

3°. $cc = xx + yy - 2\,(a-b)\,(x\,\text{coſ.}\,\theta + y\,\text{ſin.}\,\theta) + (a-b)^2$ et

4°. tang. $\Phi = \frac{y - (a - b)\, \text{fin.}\, \theta}{x - (a - b)\, \text{cof.}\, \theta}$

ita vt nunc habeamus quatuor aequationes, ex quibus ergo quatuor incognitas x & y cum angulis θ et Φ ita per tempus t definire licebit, vt ad quoduis tempus inde quatuor illae incognitae aſſignari, ſicque totus penduli motus determinari queat. Id quidem in genere maximis difficultatibus foret inuolutum; verum quia nobis hic tantum propoſitum eſt oſcillationes quaſi infinite paruas indagare, haec conditio formulas inuentas ad multo maiorem ſimplicitatem perducet; propterea quod ambo anguli θ et Φ tanquam infinite parui ſpectari poterunt; tum vero inſuper ordinata y perpetuo quam minima manebit, interea dum etiam altera x vix vllas ſenſibiles mutationes ſubibit.

§. 11. Ante omnia autem hic obſeruari conuenit, cuncta elementa, quae in has aequationes ingrediuntur, ad binos angulos θ et Φ reuocari poſſe; cum enim ſit O $c = a - b$, vocetur haec diſtantia breuitatis gratia $= e$, vt ſit $a - b = e$, ob angulum A O $c = \theta$ erit $c\,q = e$ ſin. θ et O $q = e$ coſ. θ; deinde quia recta $c\,g = c$ ad verticalem O A inclinatur angulo A $b\,g = \Phi$, erit interuallum

$$q\,p = c \text{ cof. } \Phi \text{ et } p\,g = e \text{ fin. } \theta + c \text{ fin. } \Phi.$$

Hinc igitur colligimus

$$\text{O}\,p = x = e \text{ cof. } \theta + c \text{ cof. } \Phi \text{ et}$$

$$p\,g = y = e \text{ fin. } \theta + c \text{ fin. } \Phi.$$

§. 12. Cum igitur noſtras inueſtigationes ad oſcillationes infinite paruas reſtringamus, ambo anguli θ et Φ perpetuo manebunt quam minimi, vnde ſine errore ſtatuere

ere licebit ſin. $\theta = \theta$ et ſin. $\Phi = \Phi$, tum vero coſ. $\theta = 1$ et coſ. $\Phi = 1$; ex quo habebimus $x = e + c$, ideoque conſtans, et $y = e\,\theta + c\,\Phi$; quamobrem aequationes differentio-differentiales, ob $\frac{d\,d\,x}{d\,t^2} = 0$, erunt ſequentes:

1°. $0 = 2\,g\,(M - \Pi)$, ideoque $\Pi = M$,

2°. $\frac{M(e\,d\,d\,\theta + c\,d\,d\,\Phi)}{d\,t^2} = -2\,g\,\Pi\,\theta = -2\,g\,M\,\theta$, ſiue
$\frac{e\,d\,d\,\theta + c\,d\,d\,\Phi}{d\,t^2} = -2\,g\,\theta$;

3°. $\frac{M\,k\,k\,d\,d\,\Phi}{d\,t^2} = -2\,g\,\Pi\,c\,(\Phi - \theta)$, ſiue
$\frac{k\,k\,d\,d\,\Phi}{d\,t^2} = -2\,g\,c\,(\Phi - \theta)$.

§. 13. Tota ergo motus determinatio pendet a reſolutione harum duarum aequationum differentio-differentialium:

1°. $\frac{e\,d\,d\,\theta + c\,d\,d\,\Phi}{d\,t^2} = -2\,g\,\theta$ et

2°. $\frac{k\,k\,d\,d\,\Phi}{d\,t^2} = -2\,g\,c\,(\Phi - \theta)$,

ex quibus vtrumque angulum θ et Φ ad quoduis tempus t definiri oportet. Quoniam autem in vtraque aequatione ambo anguli θ et Φ inſunt; has aequationes ita combinari conuenit, vt aequatio inde reſultet duas tantum variabiles inuoluens.

§. 14. Hunc in finem aequatio prima ducatur in conſtantem A, altera vero in conſtantem B, vt ambae invicem additae praebeant hanc aequationem:

$$\frac{A\,e\,d\,d\,\theta + (A\,c + B\,k\,k)\,d\,d\,\Phi}{2\,g\,d\,t^2} = -(A - B\,c)\,\theta - B\,c\,\Phi,$$

vbi conſtantes A et B ita definiri oportet, vt duae tantum variabiles in ea ineſſe cenſeri queant, quod igitur

vt euenire poſſit, pro parte ſiniſtra ſtatuamus:

$$A\,e\,dd\theta + (A\,c + B\,kk)\,dd\Phi = C\,ddz,$$

ideoque

$$A\,e\,\theta + (A\,c + B\,kk)\,\Phi = C\,z;$$

pro altera autem parte ponamus

$$(A - B\,c)\,\theta + B\,c\,\Phi = D\,z,$$

et aequatio noſtra induet hanc formam: $\frac{C\,ddz}{2g\,dt^2} = -D\,z$, quae duas tantum variabiles z et t complectitur.

§. 15. Nunc igitur ex formulis aſſumtis ambos angulos θ et Φ per nouam variabilem z exprimamus, atque ex prima reperietur

$$\theta = \frac{C\,z}{A\,e} - \frac{(A\,c + B\,kk)\,\Phi}{A\,e},$$

ex altera autem reperietur $\theta = \frac{D\,z - B\,c\,\Phi}{A - B\,c}$, qui duo valores ita inter ſe aequales ſtatuantur, vt vtrinque partes tam quantitatem nouam z quam angulum Φ continentes ſeorſim inter ſe aequales euadant; fieri igitur debebit

$$\frac{C}{A\,e} = \frac{D}{A - B\,c} \text{ et } \frac{A\,c + B\,kk}{A\,e} = \frac{B\,c}{A - B\,c},$$

quae poſtrema aequatio in ordinem redacta praebet

$$A\,A\,c + (kk - cc - ec)\,A\,B - B\,B\,c\,kk = 0,$$

quae aequatio quadratica geminos dabit valores pro litteris A et B, ad quos inueniendos ſtatuamus breuitatis gratia $c + e - \frac{kk}{c} = 2f$, vt aequatio noſtra fiat

$$A\,A - 2f\,A\,B - B\,B\,kk = 0,$$

vnde ſi ſumamus $B = 1$, pro A duo reperiuntur valores

1°. $A = f + \sqrt{(ff + kk)}$

2°. $A = f - \sqrt{(ff + kk)}$,

exiſten-

existente $B = 1$: ambo autem hi valores aequaliter satisfacere debent.

§. 16. Nunc igitur primo loco A scribamus valorem priorem inuentum, ex eoque orietur aequatio

$$\frac{D}{C} = \frac{1}{e} - \frac{c}{ef + e\sqrt{(ff + kk)}},$$

quae reducitur ad hanc:

$$\frac{D}{C} = \frac{kk + cf - c\sqrt{(ff + kk)}}{ekk},$$

ex altero autem valore pro A assumto reperietur

$$\frac{D}{C} = \frac{kk + cf + c\sqrt{(ff + kk)}}{ekk}.$$

Quamobrem si sumamus $C = ekk$, geminos pro D habebimus valores, perinde ac pro A; scilicet constitutis valoribus $B = 1$ et $C = ekk$, pro A et D duas nacti sumus solutiones:

Solutio prior: $\begin{cases} A = f + \sqrt{(ff + kk)} \\ D = kk + cf - c\sqrt{(ff + kk)} \end{cases}$

Solutio posterior: $\begin{cases} A = f - \sqrt{(ff + kk)} \\ D = kk = cf + c\sqrt{(ff + kk)}. \end{cases}$

§. 17. Pro solutione igitur priore relatio inter angulos θ et Φ, et nouam variabilem z sequenti modo erit comparata:

$$e\theta(f + \sqrt{(ff + kk)}) + (cf + kk + c\sqrt{(ff + kk)})\Phi = ekkz,$$

atque aequatio, ex qua incognitam z inuestigari oportet, erit

$$\frac{ekkddz}{2g\,dt^2} = -z(kk + cf - \sqrt{(ff + kk)}).$$

§. 18. Simili modo alteros valores loco A et D scribendo, pro iis loco z alia variabilis in calculum introduci

troduci debet, quae ſit z', atque relatio inter θ, Φ et z' iſta exprimetur aequatione:

$$e\theta(f-\sqrt{(ff+kk)})+(cf+kk-c\sqrt{(ff+kk)})\Phi=ekkz'$$

ipſa autem haec noua incognita z' quaeri debet ex ſequenti aequatione differentiali ſecundi gradus:

$$\frac{ekkddz'}{2gdt^2}=-z'(kk+cf+\sqrt{(ff+kk)}).$$

§. 19. Hoc igitur modo duas nouas variabiles z, et z' in calculum introduximus, quarum vtramque per integrationem aequationis differentialis ſecundi gradus haud difficulter definire licet, vt ſtatim oſtendemus; iis autem inuentis ambo anguli θ et Φ facile per z et z' exprimi poterunt. Si enim binae aequationes ante datae inuicem addantur, peruenietur ad hanc aequationem:

$$\theta+\Phi\frac{(ef+kk)}{ef}=\frac{c\Phi}{f}\frac{kk}{2f}(z+z').$$

Sin autem poſterior a priore ſubtrahatur, relinquetur iſta:

$$\theta+\frac{c\Phi}{e}=\frac{kk(z-z')}{2\sqrt{(ff+kk)}},$$

haec poſterior ab antecedente ablata relinquit

$$\frac{kk}{ef}\Phi=\frac{kkz}{2}\left(\frac{1}{f}-\frac{1}{\sqrt{(ff+kk)}}\right)+\frac{kkz'}{2}\left(\frac{1}{f}+\frac{1}{\sqrt{(ff+kk)}}\right),$$

quae aequatio per kk diuiſa et reducta dat

$$\Phi=\frac{ez(\sqrt{(ff+kk)}-f)+ez'(f+\sqrt{(ff+kk)})}{2\sqrt{(ff+kk)}}.$$

Ex hoc autem valore pro Φ inuento colligitur alter angulus

$$\theta=z\frac{(kk+cf-c\sqrt{(ff+kk)})}{2\sqrt{(ff+kk)}}-z'\frac{(kk+cf+c\sqrt{(ff+kk)})}{2\sqrt{(ff+kk)}}.$$

§. 20. Supereſt igitur, vt in valores litterarum z et z' inquiramus. Prodiit autem pro z haec aequatio:

ekk

$$\frac{ekkddz}{2g\,dt^2} + z(kk + cf - \sqrt{(ff + kk)}) = 0.$$

Ponatur hic breuitatis gratia $\frac{ekk}{kk + cf - \sqrt{(ff + kk)}} = b$, et aequatio noſtra erit $\frac{bddz}{2g\,dt^2} + z = 0$, quae per $2dz$ multiplicata et integrata praebet $\frac{b\,dz^2}{2g\,dt^2} + zz = \alpha\alpha$, vnde elicitur $\frac{2g\,dt^2}{b} = \frac{dz^2}{\alpha\alpha - zz}$; ſicque fiet $dt\sqrt{\frac{2g}{b}} = \frac{dz}{\sqrt{(\alpha\alpha - zz)}}$, hincque integrando $t\sqrt{\frac{2g}{b}} = \alpha$. ſin. $\frac{z}{\alpha}$. Hinc igitur erit

$$\text{ſin.}\left(t\sqrt{\tfrac{2g}{b}} + \delta\right) = \frac{z}{\alpha};$$

conſequenter quantitas hactenus incognita z ita per ſolum tempus t exprimetur, vt ſit $z = \alpha\,\text{ſin.}\left(t\sqrt{\frac{2g}{b}} + \delta\right)$, exiſtente $b = \frac{ekk}{kk + cf - \sqrt{(ff + kk)}}$.

§. 21. Simili modo reperietur altera quantitas incognita z'. Quodſi enim breuitatis gratia ſtatuamus

$$\frac{ekk}{kk + cf + \sqrt{(ff + kk)}} = b',$$

et loco conſtantium per integrationem ingredientium ſcribamus α' et δ', concluditur fore

$$z' = \alpha'\,\text{ſin.}\left(t\sqrt{\tfrac{2g}{b'}} + \delta'\right),$$

quibus duobus valoribus inuentis iam docuimus, quomodo ex iis ambos angulos θ et Φ determinari oporteat, quos ergo iam ad quoduis tempus elapſum t aſſignare licebit. Vbi quidem euidens eſt, quoniam anguli θ et Φ perpetuo quam minimi manere debent, coëfficientes α et α' tanquam infinite paruos eſſe ſpectandos.

Alia resolutio concinnior aequationum differentio-differentialium supra §. 12. inuentarum.

§. 22. Loco binorum angulorum θ et Φ in calculum introducantur duo alii anguli z et z', per quos illi ita determinentur, vt sit

$$\theta = A z + A' z' \text{ et } \Phi = B z + B' z';$$

tum vero isti noui anguli z et z' ita a tempore t pendeant, vt sit

$$\frac{ddz}{2g\,dt^2} = -\frac{z}{b} \text{ et } \frac{ddz'}{2g\,dt^2} = -\frac{z'}{b'}.$$

Ex his autem aequationibus, vt modo vidimus, ambo anguli z et z' ita per tempus t definientur, vt sit

$$z = \alpha\,\text{fin.}(t\surd\tfrac{2g}{b} + \delta) \text{ et } z' = \alpha'\,\text{fin.}(t\surd\tfrac{2g}{b'} + \delta')$$

vbi α et α', δ et δ' sunt constantes per integrationes ingressae, de quibus notandum est, priores α et α' esse quasi infinite paruas, propterea quod anguli z et z' perpetuo quam minimi manere debent.

§. 23. Hinc igitur erit

$$\frac{dd\theta}{2g\,dt^2} = \frac{A\,ddz + A'\,ddz'}{2g\,dt^2} = -\frac{Az}{b} - \frac{A'z'}{b'} \text{ et}$$

$$\frac{dd\Phi}{2g\,dt^2} = \frac{B\,ddz + B'\,ddz'}{2g\,dt^2} = -\frac{Bz}{b} - \frac{B'z'}{b'};$$

quare cum aequationes supra inuentae sint

$$\frac{e\,dd\theta + c\,dd\Phi}{2g\,dt^2} = -\theta \text{ et } \frac{kk\,dd\Phi}{2g\,dt^2} = -c\Phi + c\theta,$$

si hic valores modo inuenti substituantur, sequentes prodibunt aequationes:

I. —

I. $-\frac{Aez}{b} - \frac{A'ez'}{b'} - \frac{Bcz}{b} - \frac{B'cz'}{b'} = -Az - A'z'$ et

II. $-\frac{Bkkz}{b} - \frac{B'kkz'}{b'} = -c(B-A)z - c(B'-A')z'$.

§. 24. Iam quia anguli z et z' a ſe inuicem pendere non debent, in vtraque aequatione termini per z et z' affecti ſeorſim inter ſe aequari debent, vnde quatuor ſequentes aequationes reſultant:

1°. $\frac{Ae}{b} + \frac{Bc}{b} = A$;

2°. $\frac{A'e}{b'} + \frac{B'c}{b'} = A'$;

3°. $\frac{Bkk}{b} = c(B-A)$;

4°. $\frac{Bkk}{b'} = c(B'-A')$;

ex quibus conſtantes A, A', B, B', vna cum b et b' definiri debent.

§. 25. Harum aequationum prima diuidatur per tertiam, vt quantitas b eliminetur, ac reperietur

$$\frac{Ae+Bc}{Bkk} = \frac{A}{c(B-A)}.$$

Simili modo ſecunda per quartam diuiſa dabit

$$\frac{A'e+B'c}{B'kk} = \frac{A'}{c(B'-A')},$$

ex quibus relatio tam inter A et B quam inter A' et B' definiri debet; iis autem inuentis erit

$$b = \frac{Bkk}{c(B-A)} \text{ et } b' = \frac{B'kk}{c(B'-A')}.$$

§. 26. Prior autem illarum aequationum, litteras A et B continens, in ordinem redacta praebet

$$BBcc - AB(kk+cc-ce) - AAce = 0,$$

pro qua aequatione reſoluenda ponamus

$$kk + cc - ce = 2cf,$$

vt habeamus aequationem:

$$BBcc = 2ABcf + AAce,$$

cuius resolutio dat

$$Bc = Af \pm A\sqrt{(ff + ce)}, \text{ siue}$$
$$\frac{B}{A} = \frac{f \pm \sqrt{(ff + ce)}}{c},$$

vnde si sumatur $A = c$, fiet $B = f \pm \sqrt{(ff + ce)}$.

§. 27. Simili modo altera aequatio, litteras A' et B' continens, in ordinem redacta fiet

$$B'B'cc - A'B'(kk + cc - ce) - A'A'ce = 0,$$

vnde si pariter statuamus $kk + cc - ce = 2cf$, deducitur $\frac{B'}{A'} = \frac{f \pm \sqrt{(ff + ce)}}{c}$, qui valores quia cum praecedentibus perfecte conueniunt, sola ambiguitas signi radicalis discrimen constituet; quamobrem si ponamus tam $A = c$ quam $A' = c$, pro litteris B et B' nanciscemur hos valores diuersos:

$$B = f + \sqrt{(ff + ce)} \text{ et } B' = f - \sqrt{(ff + ce)}.$$

§. 28. Constitutis igitur valoribus litterarum A, B, A', B', in quibus notetur esse $f = \frac{kk + cc - ce}{2c}$, ambae quantitates insuper determinandae b et b' sequentes sortientur valores:

$$b = \frac{Bkk}{c(B - A)} = \frac{kk(f + \sqrt{(ff + ce)})}{c(f - c + \sqrt{(ff + ce)})} \text{ et}$$
$$b' = \frac{kk(f - \sqrt{(ff + ce)})}{c(f - c - \sqrt{(ff + ce)})},$$

quae expressiones facile reducuntur ad sequentes formas:

$$b = \frac{kk(e + f + \sqrt{(ff + ce)})}{2cf + ce - cc},$$

seu

seu quia posuimus $2cf = kk + cc - ce$, erit nunc

$$b = (e + f + \sqrt{(ff + ce)}).$$

Simili modo, signum radicale mutando, erit

$$b' = e + f - \sqrt{(ff + ce)}.$$

§. 29. His igitur valoribus inuentis, cum sit vt supra vidimus

$$z = \alpha \sin. (t\sqrt{\tfrac{2g}{b}} + \delta) \text{ et } z' = \alpha' \sin. (t\sqrt{\tfrac{2g}{b'}} + \delta'),$$

retentis litteris b et b', quippe quarum valores iam constant, ad quoduis tempus t, ab initio elapsum, in minutis secundis expressum, ambo anguli θ et Φ sequenti modo determinabuntur:

$$\theta = \alpha c \sin. (t\sqrt{\tfrac{2g}{b}} + \delta) + \alpha' c \sin. (t\sqrt{\tfrac{2g}{b'}} + \delta') \text{ et}$$

$$\Phi = \alpha (f + \sqrt{(ff + ce)}) \sin. (t\sqrt{\tfrac{2g}{b}} + \delta)$$
$$+ \alpha' (f - \sqrt{(ff + ce)}) \sin. (t\sqrt{\tfrac{2g}{b'}} + \delta').$$

His autem angulis cognitis, status penduli nostri ad quoduis tempus, ideoque etiam eius motus perfecte innotescet.

§. 30. Iam obseruauimus constantes per integrationes ingressas esse α, α', δ, δ', quas ergo ex statu initiali penduli, vbi erat $t = 0$, determinari oportet. Quoniam igitur assumsimus, pendulum in statu aequilibrii esse versatum, necesse est, vt facto $t = 0$ ambo anguli θ et Φ euanescant, vnde nascuntur hac duae determinationes:

1°. $0 = \alpha c \sin. \delta + \alpha' c \sin. \delta'$, siue
$0 = \alpha \sin. \delta + \alpha' \sin. \delta'$ et

2°. $0 = \alpha (f + \sqrt{(ff + ce)}) \sin. \delta$
$+ \alpha' (f - \sqrt{(ff + ce)}) \sin. \delta'$.

 Quia

Quia autem ex priore est α' sin. $\delta' = -\alpha$ sin. δ, hoc valore substituto fiet 2α sin. $\delta \sqrt{(ff + ce)}$, vnde sequitur fore vel $\alpha = 0$, vel $\delta = 0$; at vero α euanescere nequit, quia alioquin pendulum nullum motum esset accepturum: erit ergo sin. $\delta = 0$, ideoque $\delta = 0$, quamobrem nostrae expressiones erunt iam multo simpliciores

$$\theta = \alpha c \text{ fin. } t \sqrt{\tfrac{2g}{b}} + \alpha' c \text{ fin. } t \sqrt{\tfrac{2g}{b'}}, \text{ et}$$

$$\Phi = \alpha (f + \sqrt{(ff + ce)}) \text{ fin. } t \sqrt{\tfrac{2g}{b}}$$
$$+ \alpha' (f - \sqrt{(ff + ce)}) \text{ fin. } t \sqrt{\tfrac{2g}{b'}}.$$

§. 31. Deinde vero assumsimus initio, centro gravitatis celeritatem imprimi $= n$, quare cum ista celeritas in genere sit $= \frac{dy}{dt} = \frac{e\,d\theta + c\,d\Phi}{dt}$, posito $t = 0$ ista expressio fieri debet $= n$; reperitur vero

$$\tfrac{d\theta}{dt} = \alpha c \sqrt{\tfrac{2g}{b}} \text{ cof. } t \sqrt{\tfrac{2g}{b}} + \alpha' c \sqrt{\tfrac{2g}{b'}} \text{ cof. } t \sqrt{\tfrac{2g}{b'}};$$

deinde erit simili modo

$$\tfrac{d\Phi}{dt} = \alpha B \sqrt{\tfrac{2g}{b}} \text{ cof. } t \sqrt{\tfrac{2g}{b}} + \alpha' B' \sqrt{\tfrac{2g}{b'}} \text{ cof. } t \sqrt{\tfrac{2g}{b'}},$$

vbi retinuimus litteras B et B' loco valorum

$$f + \sqrt{(ff + ce)} \text{ et } f - \sqrt{(ff + ce)}.$$

His igitur valoribus adhibitis, posito $t = 0$, ista conditio motus impressi dabit hanc aequationem:

$$n = \alpha c \sqrt{\tfrac{2g}{b}} (e + B) + \alpha' c \sqrt{\tfrac{2g}{b'}} (e + B');$$

quia igitur erat

$$b = e + f + \sqrt{(ff + ce)} = e + B,$$

similique modo $b' = e + B'$, ista aequatio hanc induet formam simpliciorem:

$$n = \alpha c \sqrt{2gb} + \alpha' c \sqrt{2gb'}$$

§. 32.

§. 32. Praeterea vero assumsimus, toti pendulo initio quoque motum angularem esse impressum, cuius celeritas sit $= \nu$. Quia igitur in genere celeritas penduli est $\frac{d\Phi}{dt}$, necesse est vt posito $t = 0$ fiat $\frac{d\Phi}{dt} = \nu$, vnde nascitur ista aequatio:

$$\nu = \alpha \mathrm{B} \sqrt{\frac{2g}{b}} + \alpha' \mathrm{B}' \sqrt{\frac{2g}{b'}},$$

vnde deducimus:

$$\alpha' \sqrt{\frac{2g}{b'}} = \frac{\nu}{\mathrm{B}'} - \frac{\alpha \mathrm{B}}{\mathrm{B}'} \sqrt{\frac{2g}{b}},$$

qui valor in aequatione praecedente, vbi adhuc inerant litterae B et B', substitutus dabit:

$$n = \alpha c e \sqrt{\frac{2g}{b}} \frac{(\mathrm{B}' - \mathrm{B})}{\mathrm{B}'} + \frac{\nu c (e + \mathrm{B}')}{\mathrm{B}'}.$$

Quia igitur est

$$\mathrm{B}' - \mathrm{B} = -2\sqrt{(ff + ce)} \text{ et } e + \mathrm{B}' = b', \text{ erit}$$

$$n = -\frac{2\alpha c e}{\mathrm{B}'} \sqrt{\frac{2g}{b}} (ff + ce) + \frac{\nu c b'}{\mathrm{B}'},$$

ex qua aequatione reperimus:

$$\alpha \sqrt{\frac{2g}{b}} = \frac{\nu b'}{2e\sqrt{(ff + ce)}} - \frac{n \mathrm{B}'}{2ce\sqrt{(ff + ce)}},$$

quo valore substituto fiet

$$\alpha' \sqrt{\frac{2g}{b'}} = \frac{\nu}{\mathrm{B}'} - \frac{\mathrm{B}\nu b'}{2\mathrm{B}' e\sqrt{(ff + ce)}} + \frac{n\mathrm{B}}{2ce\sqrt{(ff + ce)}}, \text{ siue}$$

$$\alpha' \sqrt{\frac{2g}{b'}} = \frac{-\nu b}{2e\sqrt{(ff + ce)}} + \frac{n\mathrm{B}}{2ce\sqrt{(ff + ce)}},$$

sicque omnes quatuor constantes α et α', δ et δ', ex statu initiali determinauimus. Vnde pro quouis tempore futuro t tam status penduli quam eius motus assignari poterit.

De

De motu regulari quem pendulum propoſitum recipere poteſt.

§. 33. Quamdiu ambo ſinus illorum angulorum: $t\sqrt{\frac{2g}{b}}+\delta$ et $t\sqrt{\frac{2g}{b'}}+\delta'$, in formulas noſtras ingrediuntur, quas quidem hic in genere, ſine vllo reſpectu ad certum ſtatum initialem habito, ſumus conſideraturi, motus penduli pro mixto haberi debet ex duobus motibus ſimplicioribus, quorum vterque ex vno illorum angulorum oriri eſt cenſendus. Ex quo intelligitur, tum demum motum penduli pro ſimplici haberi poſſe, quando vnicus tantum illorum ſinuum in calculum ingreditur, id quod euenit, quando fuerit vel $\alpha = 0$ vel $\alpha' = 0$; tum enim totus penduli motus ſimilis erit motui penduli ſimplicis, quod omnes ſuas oſcillationes iſochronas peragit.

§. 34. Euoluamus igitur primo caſum, quo $\alpha' = 0$, atque ad quoduis tempus t bini anguli θ et Φ ſequenti modo exprimentur:

$$\theta = \alpha c \,\text{ſin.}\, (t\sqrt{\tfrac{2g}{b}}+\delta) \text{ et}$$

$$\Phi = \alpha(f+\sqrt{(ff+ce)}\,\text{ſin.}\,(t\sqrt{\tfrac{2g}{b}}+\delta),$$

ex quibus colligitur differentiando:

$$\frac{d\theta}{dt} = \alpha c\sqrt{\tfrac{2g}{b}}\,\text{coſ.}\,(t\sqrt{\tfrac{2g}{b}}+\delta) \text{ et}$$

$$\frac{d\Phi}{dt} = \alpha\sqrt{\tfrac{2g}{b}}(f+\sqrt{(ff+ce)})\,\text{coſ.}\, t\sqrt{(\tfrac{2g}{b}}+\delta)$$

vbi $\frac{d\theta}{dt}$ et $\frac{d\Phi}{dt}$ celeritates angulares exprimunt, quibus pendulum tam circa punctum O, quam circa punctum c gyratur.

§. 35. Quando ergo hae poſtremae expreſſiones euaneſcunt, tum totum pendulum ad ſtatum quietis erit redactum, quod quia in maximis excurſionibus contingit, inde nouae oſcillationes computari ſolent; haec igitur momenta euenient, quando coſ. $(t \sqrt{\frac{2g}{b}} + \delta) = 0$, hoc eſt quando angulus ipſe $t \sqrt{\frac{2g}{b}} + \delta$ vel recto, vel tribus rectis aequalis euadit. Ponamus igitur $t \sqrt{\frac{2g}{b}} + \delta = 90 = \frac{\pi}{2}$, et pendulum in iſtum ſtatum perueniet elapſo tempore $t = (90 - \delta) \sqrt{\frac{b}{2g}}$; dehinc vero iterum in talem ſtatum perueniet elapſo tempore $t = (270 - \delta) \sqrt{\frac{b}{2g}}$. Sicque interuallum inter haec duo momenta, cui tempus vnius oſcillationis aequale reputari ſolet, erit $= 180 \sqrt{\frac{b}{2g}} = \pi \sqrt{\frac{b}{2g}}$, quod hoc modo in minutis ſecundis exprimetur; vnde patet, has oſcillationes iſochronas fore pendulo ſimplici longitudinis $= b$.

§. 36. Noſtrum ergo pendulum eiusmodi motum regularem recipere poteſt, qui conueniat cum motu penduli ſimplicis, cuius longitudo $= b$. Vidimus autem hanc longitudinem b ita per elementa, quibus pendulum noſtrum conſtituitur, determinari, vt ſit

$$b = e + f + \sqrt{(ff + ce)},$$

exiſtente $f = \frac{kk + cc - ce}{2c}$. Reuera autem noſtrum pendulum in pendulum ſimplex abibit, quando fit $kk = 0$, quoniam tum tota penduli maſſa in centro grauitatis g colligitur; tum vero inſuper punctum O in ipſum punctum a incidit, quandoquidem tum noſtrum pendulum longitu-

 dinis

dinis $cg = c$ circa punctum fixum c oscillationes peraget; facto autem $kk = 0$ et $e = 0$ erit $f = \frac{1}{2}c$, hincque $h' = c$, id quod egregie conuenit cum veritate. Tum vero etiam in genere notari meretur casus, quo $kk = 0$, siue tota penduli massa in centro grauitatis g vnita; tum enim erit $f = \frac{c-e}{2}$, hincque $\sqrt{(ff+ce)} = \frac{c+e}{2}$, vnde fit $h = c + e$; quare cum sit $Oc = e$ et $cg = c$, ideoque $Og = c + e = h$, pendulum perinde oscillationes peraget, quasi ex puncto O esset suspensum.

§. 37. Euidens autem est, figuram fulcri MAN plurimum conferre ad motum istum penduli oscillatorium, id quod operae pretium erit accuratius contemplari. Primo igitur sumamus superficiem fulcri esse planam et horizontalem, cui axis cylindricus penduli incumbat; erit igitur radius $AO = a = \infty$; et quia b est radius axis, erit etiam distantia $Oc = e = \infty$, vnde angulus θ necessario euanescere debet, ita vt spatium $e\theta$, quod interuallum Ac indicat, maneat finitum adeoque quam minimum; tum igitur erit

$$f = -\frac{1}{2}e + \frac{1}{2}c + \frac{kk}{2c}, \text{ hincque}$$
$$ff = \frac{1}{4}ee - \frac{1}{2}ce - \frac{ekk}{2c}, \text{ ideoque}$$
$$ff + ce = \frac{1}{4}ee + \frac{1}{2}ce - \frac{ekk}{2c} \text{ et}$$
$$\sqrt{(ff+ce)} = \frac{1}{2}e + \frac{1}{2}c - \frac{kk}{2c},$$

hinc igitur colligitur $h = c + e$, quae longitudo cum sit infinita, patet, super fulcro plano axem penduli ita de loco dimoueri posse, vt nullae oscillationes oriantur.

§. 38. Quoniam autem quantitas radicalis $\sqrt{(ff+ce)}$ etiam signum negatiuum inuoluit, si eius valorem

lorem negatiuum capiamus, orietur pro eodem casu fulcri plani $b = \frac{kk}{c}$; vnde patet, nisi tota penduli massa in centro grauitatis sit collecta, tale pendulum fulcro plano incumbens etiam oscillari posse ad similitudinem penduli simplicis, cuius longitudo $= \frac{kk}{c}$. Pro hoc autem casu $e = \infty$ et $b = \frac{kk}{c}$, motus nostri penduli his formulis exprimetur:

$$\theta = \alpha c \text{ sin. } (\tfrac{t}{k} \sqrt{2gc} + \delta) \text{ et}$$

$$\Phi = \alpha (\tfrac{kk}{c} - e) \text{ sin. } (\tfrac{t}{k} \sqrt{2gc} + \delta),$$

vnde patet, α tam exiguum assumi debere, vt adhuc αe maneat quam minimum. Sumamus igitur $\alpha e = -\beta$, siue $\alpha = -\frac{\beta}{e}$, vnde erit

$$e\theta = -\beta c \text{ sin. } (\tfrac{t}{k} \sqrt{2gc} + \delta) \text{ et}$$

$$\Phi = \beta \text{ sin. } (\tfrac{t}{k} \sqrt{2gc} + \delta).$$

Hic scilicet, dum pendulum in excursione maxima versabitur, axis cylindricus super fulcro plano retrocessit per spatium $ac = e\theta = \beta c$, vbi cum recta cg a situ verticali declinet angulo β, euidens est centrum grauitatis in ipsam verticalem principalem incidere; ex quo intelligitur, pendulum ad talem motum oscillatorium componi posse, dum axis cylindricus extra verticalem principalem remouetur, centrum gravitatis autem in ipsa hac recta in g retinetur; tum enim, si fuerit dimissum, cum recta cg ad situm verticalem appropinquat; axis cylindricus super fulcro versus A accedet, atque adeo vltra A procedet, qui motus reciprocus conformis erit pendulo longitudinis $\frac{kk}{c}$.

Tab. IV. Fig. 6.

§. 29. Eodem modo res ſe habet ſi fuerit $\alpha = 0$, tum enim noſtrum pendulum pariter motum regularem recipiet, et ambo anguli θ et Φ ſequentes mutationes ſubibunt:

$$\theta = \alpha' c \text{ ſin. } (t \sqrt{\tfrac{2g}{b'}} + \delta') \text{ et}$$

$$\Phi = \alpha' (f - \sqrt{(ff + ce)}) \text{ ſin. } (t \sqrt{\tfrac{2g}{b'}} + \delta'),$$

hicque motus reciprocus congruet cum motu oſcillatorio penduli ſimplicis, cuius longitudo $= b'$. Vidimus autem eſſe $b' = e + f - \sqrt{(ff + ce)}$, exiſtente $f = \frac{kk + cc - ce}{2c}$. Caeterum phoenomena hinc oriunda, quando fulcrum planum ſtatuitur, iam ante commemorauimus, vbi formulam radicalem $\sqrt{(ff + ce)}$ negatiuam aſſumſimus.

§. 40. Antequam etiam motus irregulares perpendamus, caſus ſupra memoratus, quo axis cylindricus penduli fulcro plano extra punctum A incumbit, dum centrum grauitatis g in ipſa recta verticali A g detinetur, quandam illuſtrationem poſtulat, quoniam ex formulis inventis ſequitur, centrum grauitatis g perpetuo in recta verticali A g eſſe verſaturum, dum interea axis cylindricus hinc atque hinc a puncto A motu reciproco digredietur et oſcillationes peraget pendulo ſimplici longitudinis $= \frac{kk}{c}$ conformes, id quod experientiae contrarium videbitur, dum potius centrum grauitatis g circa axem cylindricum immotum oſcillationes peragere deprehendetur. Verum iſte effectus manifeſto frictioni erit tribuendus, qua axis cylindricus non ſine difficultate ſuper fulcro progredi poteſt. Verum in tota hac analyſi frictionem penitus e medio ſuſtulimus, ita vt axis cylindricus liberrime ſuper

fulcro

fulcro moueri queat; ſublata enim frictione, quia tam pondus penduli quam preſſio in fulcrum in directione verticali agunt, hae duae vires, ipſi centro grauitatis applicatae, nullum motum lateralem generare poſſunt, ſed centrum grauitatis perpetuo in eadem recta verticali perſiſtere debet

De motibus irregularibus, quos pendulum propoſitum recipere poteſt.

§. 41. Quando neutra conſtantium α et α' euaneſcit, motus orietur maxime irregularis: inuoluet enim duplicem motum oſcillatorium, quorum alter reſpondebit pendulo ſimplici longitudinis $= h$, et periodos ſuas abſoluet tempore $t = \pi \surd \frac{h}{2g}$; alter vero motus reſpondebit pendulo longitudinis $= h'$, cuius periodi abſoluentur tempore $t = \pi \surd \frac{h'}{2g}$. Quare ex hac permiſtione, pro diuerſitate quantitatum h et h', inprimis autem pro ratione tam inter coëfficientes α et α', quam inter angulos δ et δ', immenſa varietas locum habere poterit, cuius omnes diuerſas agitationes nullo modo recenſere vel enumerare licebit.

§. 42. Quae quo facilius, mente ſaltem, percipi queant, ambos valores litterarum h et h' accuratius ex primis elementis, quibus ſtatus penduli continetur, euoluamus. Cum igitur breuitatis gratia poſuerimus

$$f = \frac{kk + cc - ce}{2c}, \text{ erit } f + e = \frac{kk + cc + ce}{2c},$$

tum vero

$$\surd (ff + ce) = \frac{1}{2c} \surd k^4 + 2ckk(c - e) + cc(c + e)^2,$$

 quare

quare cum ſit

$$b = e + f + \sqrt{(ff + ce)} \text{ et } b' = e + f - \sqrt{(ff + ce)},$$

hi ambo valores euoluti erunt:

$$b = \frac{kk + cc + ce}{2c} + \frac{1}{2c}\sqrt{k^4 + 2ckk(c-e) + cc(c+e)^2} \text{ et}$$

$$b' = \frac{kk + cc + ce}{2c} - \frac{1}{2c}\sqrt{k^4 + 2ckk(c-e) + cc(c+e)^2}.$$

§. 43. His duobus valoribus conſtitutis, quoniam ſupra vidimus eſſe etiam $b = e + B$ et $b' = e + B'$, erit viciſſim $B = b - e$ et $B' = b' - e$. Hinc igitur ambo anguli θ et Φ, pro quouis tempore t ſequenti modo determinabuntur:

$$\theta = \alpha c \text{ ſin. } (t\sqrt{\tfrac{2g}{b}} + \delta) + \alpha' c \text{ ſin. } (t\sqrt{\tfrac{2g}{b'}} + \delta') \text{ et}$$

$$\Phi = \alpha(b-e)\text{ ſin. }(t\sqrt{\tfrac{2g}{b}} + \delta) + \alpha'(b'-e)\text{ ſin. }(t\sqrt{\tfrac{2g}{b'}} + \delta'),$$

ex quibus formulis etiam ambae celeritates angulares, ſcilicet $\frac{d\theta}{dt}$ et $\frac{d\Phi}{dt}$, quibus ipſi anguli θ et Φ poſt tempus $= t$ promouebuntur, aſſignari poterunt; erit enim:

$$\frac{d\theta}{dt} = \alpha c\sqrt{\tfrac{2g}{b}}\text{ coſ. }(t\sqrt{\tfrac{2g}{b}} + \delta) + \alpha' c\sqrt{\tfrac{2g}{b'}}\text{ coſ. }(t\sqrt{\tfrac{2g}{b'}} + \delta') \text{ et}$$

$$\frac{d\Phi}{dt} = \alpha(b-e)\sqrt{\tfrac{2g}{b}}\text{ coſ. }(t\sqrt{\tfrac{2g}{b}} + \delta)$$

$$+ \alpha'(b'-e)\sqrt{\tfrac{2g}{b'}}\text{ coſ. }(t\sqrt{\tfrac{2g}{b'}} + \delta'),$$

quibus elementis vniuerſus penduli motus perfecte determinatur, ita vt nihil amplius deſiderari poſſit.

§. 44. Saepenumero, imprimis quando centrum fulcri O ad inſignem diſtantiam conſtituitur, vel adeo infra fulcrum cadit, id quod euenit quando curuatura fulcri MAN euadit conuexa, e re erit ipſum angulum θ ex calculo expellere, eiusque loco arcum Cc, per quem centrum axis cylindrici c e ſitu naturali C iam eſt digreſſum

gressum in calculum introducere. Ponamus igitur istum arcum $Cc = s$, et cum sit interuallum $OC = Oc = e$, erit iste arcus $s = e\theta$, qui quo concinnius in calculum inferatur, loco $\alpha e'$ et $\alpha' e$, scribamus litteras β et β', vt sit $\alpha = \frac{\beta}{e}$ $\alpha' = \frac{\beta'}{e}$, atque hinc tam iste arcus $Cc = s$, quam obliquitas penduli, seu angulus $Chc = \Phi$, sequenti modo definientur:

$$s = \beta c \text{ sin.} (t \sqrt{\tfrac{2g}{b}} + \delta) + \beta' c \text{ sin.} (t \sqrt{\tfrac{2g}{b'}} + \delta') \text{ et}$$

$$\Phi = \frac{\beta(b-e)}{e} \text{ sin.} (t \sqrt{\tfrac{2g}{b}} + \delta) + \frac{\beta'(b'-e)}{e} \text{ sin.} (t \sqrt{\tfrac{2g}{b'}} + \delta'),$$

mutationes autem momentaneae siue celeritates erunt:

$$\frac{ds}{dt} = \beta c \sqrt{\tfrac{2g}{b}} \text{ cos.} (t \sqrt{\tfrac{2g}{b}} + \delta) + \beta' c \sqrt{\tfrac{2g}{b'}} \text{ cos.} (t \sqrt{\tfrac{2g}{b'}} + \delta') \text{ et}$$

$$\frac{d\Phi}{dt} = \frac{\beta(b-e)}{e} \sqrt{\tfrac{2g}{b}} \text{ cos.} (t \sqrt{\tfrac{2g}{b}} + \delta) + \frac{\beta'(b'-e)}{e} \sqrt{\tfrac{2g}{b'}} \text{ cos.} (t \sqrt{\tfrac{2g}{b'}} + \delta'),$$

vbi notetur, vt totus motus intra limites infinite paruos includatur, pro litteris β et β' fractiones infinite paruas statui debere.

§. 45. Hinc operae pretium erit casum, quo fulcrum superne est conuexum, seorsim perpendere. Sit igitur MAN figura fulcri superne conuexi, cuius centrum sit in O, eiusque profunditas infra centrum axis cylindrici C, nempe interuallum $OC = i$. Elapso autem tempore t sit centrum axis cylindrici in c, ita vt confecerit arcum $Cc = s$; tum vero posita penduli obliquitate, seu angulo $Cbc = \Phi$, et interuallo $cg = c$, praecedentes formulae ad hunc casum accommodabuntur, si vbique loco e scribatur $-i$; tum igitur primo ambae quantitates b et b', sequenti modo exprimentur:

Tab. V. Fig. 1.

$b =$

$$b = \frac{kk + cc - ci}{2c} + \frac{1}{2c} \sqrt{(k^4 + 2ckk(c+i) + cc(c-i)^2} \text{ et}$$

$$b' = \frac{kk + cc - ci}{2c} - \frac{1}{2c} \sqrt{k^4 + 2ckk(c+i) + cc(c-i)^2}.$$

§. 46. Pro motibus autem omnibus poſſibilibus huius penduli definiendis habebimus ſequentes formulas:

$$s = \beta c \sin.(t \sqrt{\tfrac{2g}{b}} + \delta) + \beta' c \sin.(t \sqrt{\tfrac{2g}{b'}} + \delta') \text{ et}$$

$$\Phi = -\frac{\beta(b+i)}{i} \sin.(t \sqrt{\tfrac{2g}{b}} + \delta) - \frac{\beta'(b'+i)}{i} \sin.(t \sqrt{\tfrac{2g}{b'}} + \delta');$$

pro celeritatibus autem valebunt hae expreſſiones:

$$\frac{ds}{dt} = \beta c \sqrt{\tfrac{2g}{b}} \cos.(t \sqrt{\tfrac{2g}{b}} + \delta) + \beta' c \sqrt{\tfrac{2g}{b'}} \cos.(t \sqrt{\tfrac{2g}{b'}} + \delta') \text{ et}$$

$$\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{\beta(b+i)}{i} \sqrt{\tfrac{2g}{b}} \cos.(t \sqrt{\tfrac{2g}{b}} + \delta)$$

$$- \frac{\beta'(b'+i)}{i} \sqrt{\tfrac{2g}{b'}} \cos.(t \sqrt{\tfrac{2g}{b'}} + \delta').$$

§. 47. Circa omnes autem has formulas probe obſeruari conuenit, eas ſubſiſtere non poſſe, niſi ambae quantitates b et b' fuerint poſitiuae, quia alioquin formulae noſtrae euaderent imaginariae; quando autem hoc vſu venit, id indicio erit, tale pendulum ſuper fulcro plane nullum motum oſcillatorium recipere poſſe, ſed poſt motum impreſſum de fulcro eſſe delapſurum, id quod imprimis erit metuendum circa quantitatem b' in poſteriori caſu fulcri ſuperne conuexi.

Appendix de motu vacillatorio ſiue nutatorio,

quo cunae agitari ſolent.

§. 48. De hoc motu iam pridem tractationem in medium attuli, vbi imprimis motum reciprocum cunarum

rum ſuper pauimento plano horizontali ſum contemplatus, atque in longitudinem penduli ſimplicis inquiſiui, quod ſuas oſcillationes paribus temporibus abſolueret. Euidens autem eſt praeſentem tractationem ad iſtum caſum reduci, ſi tota penduli maſſa ſupra fulcrum exiſtere ſtatuatur, ita vt nulla eius pars infra fulcrum porrigatur.

§. 49. Referat igitur arcus circuli M A N figuram pauimenti, ſuper quo cunae ſint agitandae, cuius punctum imum ſit in A et centrum curuedinis in O, et quod ante axem penduli cylindricum vocauimus, hic imprimis corpus cunarum conſtituet, cuius centrum in ſtatu aequilibrii reperiatur in C; vbi euidens eſt, radium curvaturae baſeos cunarum minorem eſſe debere radio A O, ſiquidem pauimentum ſuperne fuerit concauum. Ponatur igitur, vt ante, diſtantia $OC = e$, et quia totum corpus ſuper pauimentum exiſtit, ponamus in ſitu aequilibrii centrum grauitatis totius corporis cadere in punctum G, infra centrum motus C, interuallo $Cg = c$ ſitum; ſi enim ſupra C reperiretur, facile intelligere licet, nullum motum reciprocum oriri poſſe. Tab. V. Fig. 2.

§. 50. Tempore iam elapſo t peruenerit centrum curuedinis cunarum in punctum c, percurſo arcu $Cc = s$, ita vt ex puncto O per c ducta recta O c pauimento in ipſo puncto contactus occurrat; nunc vero centrum grauitatis totius corporis reperiatur in puncto g, exiſtente $cg = c$, quae recta, retro producta, verticali A O occurrat in b et angulus $Cbc = \phi$ indicabit obliquitatem cunarum, quarum corpus in figura perperam per totum circulum eſt deſignatum; ſufficit enim vt baſis, quae pauimento in-

 ſiſtit,

sistit, curuaturam habeat ex centro c descriptam, quandoquidem hic oscillationes seu vacillationes tantum infinite paruas consideramus; hoc eo magis notasse iuuabit, quia alioquin centrum grauitatis G aegre infra C incideret. Denique vero totum momentum inertiae corporis cunarum sit, vt supra posuimus, $= Mkk$, designante M pondus totius corporis, cuius quidem ratio iterum ex calculo est egressa.

§. 51. Hoc statu cunarum constituto nunc quidem manifestum est, infinities plures motus reciprocos locum inuenire posse, quam olim assignaueram, vbi scilicet totam inuestigationem ad oscillationes tantum regulares restrinxeram; praeterea vero, quia ibi pauimentum planum assumseram, praesens euolutio huius argumenti non solum multo est generalior, sed etiam omnes motus possibiles in se complectitur.

§. 52. Ad statum igitur cunarum propositarum rite cognoscendum totum negotium ad tria elementa reducitur, quorum primum est distantia centrorum ipsius pauimenti O et cunarum C, quam ponimus $OC = e$; secundum elementum est profunditas centri grauitatis G infra centrum motus C, quam ponimus $GG = cg = c$; tertium vero elementum est quadratum kk, per quod tota massa multiplicata praebet momentum inertiae totius corporis respectu centri grauitatis G vel g.

§. 53. Quodsi iam via a centro motus descripta Cc ponatur $= s$ et obliquitas cunarum, seu angulus

Cbe

$Cbc = \Phi$, poſtquam ex ternis elementis cognitis eruti fuerint hi duo valores:

$$b = \frac{kk + cc + ce}{2c} + \frac{1}{2c}\sqrt{(k^4 + 2ckk(c-e) + cc(c+e)^2)} \text{ et}$$

$$b' = \frac{kk + cc + ce}{2c} - \frac{1}{2c}\sqrt{(k^4 + 2ckk(c-e) + cc(c+e)^2}$$

ad datum quoduis tempus t binae litterae s et Φ ſequenti modo determinabuntur:

$$s = \beta c \text{ ſin.}\left(t\sqrt{\tfrac{2g}{b}} + \delta\right) + \beta' c \text{ ſin.}\left(t\sqrt{\tfrac{2g}{b'}} + \delta'\right) \text{ et}$$

$$\Phi = \beta\frac{(b-e)}{e}\text{ ſin.}\left(t\sqrt{\tfrac{2g}{b}} + \delta\right) + \beta'\frac{(b'-e)}{e}\text{ ſin.}\left(t\sqrt{\tfrac{2g}{b'}} + \delta'\right).$$

Sin autem pauimentum fuerit conuexum, loco e ſcribi debet $-i$, vnde formulae exſurgent §. 46 allegatae. Caeterum hic eadem ſunt obſeruanda, quae ſupra fuſius ſunt expoſita.

DE MOTV PENDVLI

CIRCA AXEM CYLINDRICVM, FVLCRO DATAE FIGVRAE INCVMBENTEM, MOBILIS. HABITA FRICTIONIS RATIONE.

Dissertatio altera.

Auctore

L. EVLERO.

§. 1.

In praecedente dissertatione, vbi motum penduli circa axem cylindricum dato fulcro incumbentem determinauimus, animum penitus ab omni frictione abstraximus, ita vt axis super fulcro liberrime sine vllo impedimento prorepere queat; quod cum in praxi nunquam vsu venire possit, quaeramus hic, qualis effectus in motu huiusmodi pendulorum a frictione produci debeat; vbi quidem nostram inuestigationem ad oscillationes tantum quamminimus restringemus.

Tab. V. Fig. 1. §. 2. Sit igitur vt ante NAM figura fulcri saltem circa punctum imum A circularis, cuius centrum sit in

in O, vnde ducatur recta verticalis O A G ac dicatur radius $AO = a$. Iam elapso tempore quocunque t pendulum nostrum eiusmodi teneat situm, vt eius axis cylindricus fulcro incumbat in puncto a, vnde per centrum eius axis c, agatur recta $a c$ O, quippe quae per ipsum punctum O transibit, voceturque radius $ac = b$, ita vt interuallum $Oc = a - b = e$, angulum vero AOa ponamus $= \theta$; in hoc porro statu penduli eius centrum grauitatis erit in puncto g, ex quo per centrum axis c ducta recta gch, occurrat rectae verticali O A in puncto h, maneatque vt ante distantia $cg = c$, angulus vero obliquitatis $Ghg = \Phi$. Denique, denotante M massam seu pondus totius penduli, exprimat Mkk momentum inertiae omnis materiae pendulum constituentis, respectu axis per ipsum punctum g ducti et axi cylindrico paralleli.

§. 3. His positis, si ex puncto g ad verticalem O G ducatur normalis gp, vocenturque interualla $Op = x$ et $pg = y$, ea per binos angulos $AOa = \theta$ et $Ahg = \Phi$ ita exprimentur, vt sit $Op = x = e \operatorname{cos.} \theta + c \operatorname{cos.} \Phi$ et $pg = y = e \operatorname{sin.} \theta + c \operatorname{sin.} \Phi$. Quare si isti anguli fuerint quasi infinite parui, quemadmodum in oscillationibus minimis euenire necesse est, erit $x = e + c$ et $y = e\theta + c\Phi$, atque ex praecedentibus satis liquet fore pressionem, qua axis cylindricus fulcrum in puncto a premit, ipsi ponderi totius penduli aequalem, ideoque $= M$, vnde fulcrum pari vi M in puncto a axem cylindricum in directione $a c$ O reagere est censendum, dum totum pondus penduli M ipsi centro grauitatis g in directione verticali applicatum est intelligendum.

§. 4. Hae autem erant duae vires, quibus pendulum, remota omni frictione, in superiori dissertatione sollicitari considerauimus, et ex quarum actione vniuersum motum determinauimus. Nunc autem, accedente frictione, tertia quaedam vis insuper adiici debebit, a frictione oriunda, quae suum effectum exerit in ipso puncto contactus a, vbi scilicet axis cylindricus fulcro incumbit. Constat autem quantitatem frictionis certae cuipiam parti totius pressionis, veluti parti tertiae, aequalem aestimari posse; vnde cum pressio in puncto a sit $= M$, statuamus ipsam frictionem $= \lambda M$, ita vt plerumque sit $\lambda = \frac{1}{3}$, siquidem frictio totum suum effectum exerat, id quod euenit, quando axis cylindricus super fulcro reuera prorepit, idque radit. Quare si ponamus axem cylindricum super fulcro secundum directionem a N prorepere, frictio aget secundum directionem oppositam a A, eritque idcirco ad rectam $a\,c$ O normalis; haec igitur est tertia illa vis praeter binas vires ante descriptas in calculum introducenda.

§. 5. Quia iam obseruauimus, frictionem tum demum totum suum effectum exerere, quando reuera fit attritus, siue punctum A super fulcro promouetur; ante omnia nobis videndum est, quanta celeritate punctum contactus a super fulcro procedat. Hunc in finem in ipsam celeritatem, qua punctum a profertur, inquiramus. Ac primo quidem patet, si nullus adesset motus penduli angularis, hoc est, si celeritas angularis esset $\frac{d\Phi}{dt} = 0$, tum motum puncti a aequalem fore motui puncti c, quod cum circa O proferatur celeritate $= \frac{e\,d\theta}{dt}$, eadem celeritate quoque

punctum

punctum a versus N proferri est censendum. At vero ob motum angularem ipsius penduli, cuius celeritas est $\frac{d\Phi}{dt}$, punctum a insuper circa punctum c proferetur, etiam versus N, celeritate $= \frac{b\,d\Phi}{dt}$, ita vt tota celeritas, qua in puncto a fit attritus, sit $= \frac{e\,d\theta + b\,d\Phi}{dt}$, quae ergo expressio nisi fuerit euanescens, frictio totum suum effectum $= \lambda M$ in directione a A exeret.

§. 6. Facile autem perspicitur, hunc casum cum nostra hypothesi, qua oscillationes infinite paruas statuimus, nullo modo consistere posse. Quoniam enim omnes motus sunt tardissimi, si talis vis in directione a A adesset, cuius quantitas foret circiter $= \frac{1}{3}$ M, omnis motus quasi in instanti subito extingueretur totumque pendulum ad statum quietis redigeretur; quamobrem vt motus oscillatorius locum habere possit, omnino necesse est, vt formula $\frac{e\,d\theta + b\,d\Phi}{dt}$ perpetuo maneat nihilo aequalis, id quod euenire nequit, nisi ipsa formula finita $e\,\theta + b\,\Phi$ fuerit vel nulla, vel constans; quia autem per se est infinite parua, statui poterit $e\,\theta = - b\,\Phi$, siue $\theta = - \frac{b\Phi}{e}$, ita vt angulus θ in contrariam partem vergere debeat.

§. 7. Admissa igitur frictione alius motus oscillatorius locum habere nequit, nisi axis cylindricus in regionem contrariam versus M recedat, dum motus gyratorius fit versus alteram plagam N. Hoc scilicet casu axis cylindricus super fulcro voluendo procedet, ita vt nullus attritus sese exerere possit; vnde si recta $c\,g$ circulum minorem secet in α, in quo puncto pendulum ipso initio

tio incubuit puncto A, euidens eſt arcum A a aequalem fore arcui $a\,\alpha$; vnde cum iſti arcus ſint quaſi infinite parvi, manifeſtum eſt, rectam $c\,g$ perpetuo per ipſum punctum A eſſe tranſituram, id quod etiam inde patet, quod ſit $e\,\theta = -b\,\Phi$. Quia enim in triangulo O A c eſt angulus A O $c = -\theta$, et angulus O A $c = \Phi$, ob hos angulos infinite paruos erit $-\theta : \Phi = $ A c : O c; eſt vero A $c = \alpha\,c$, ob ſpatiolum A α euaneſcens, et O $c = e$; vtique ergo erit $-e\,\theta = b\,\Phi$.

Tab. V. Fig. 4.

§. 8. Quoniam igitur hoc motu omnis attritus ceſſat, etiam frictio totam ſuam vim, quam aeſtimauimus $= \frac{1}{3}$ M, neutiquam exeret, ſed quouis momento tantilla ſolum vi aget, quanta praeciſe opus eſt ad attritum auertendum. Hinc igitur vis, quam frictio reuera exeret, quam conſtanter ponamus $= \lambda$ M, erit quantitas variabilis quam minima atque inde definienda, vt nullus oriatur attritus, ſiue vt perpetuo maneat $e\,\theta + b\,\Phi = 0$. Probe ſcilicet hic eſt animaduertendum, etiamſi reuera nullus adſit attritus, tamen ideo frictionem non omni vi eſſe deſtitutam, ſiue penitus otioſam, ſed eius effectum in eo conſumi, vt attritus omnis impediatur, ſiue vt iſta aequalitas $e\,\theta + b\,\Phi = 0$, perpetuo conſeruetur.

§. 9. Reſumamus autem figuram praecedentem; quoniam ad eam iam ſupra motus determinationem accommodauimus, id quod vtique fieri licet, dummodo notetur perpetuo eſſe $e\,\theta + b\,\Phi = 0$, ſiue $\theta = -\frac{b\,\Phi}{e}$. Nunc igitur praeter binas vires ſuperiores, preſſionem ſcilicet in puncto contactus a et totum penduli pondus, inſuper

tertiam

tertiam vim adiungi oportet $= \lambda M$, in directione $a O$ agentem, quae resoluta dabit vim horizontalem

$$= \lambda M \cos. \theta = \lambda M$$

et verticalem deorsum tendentem $= \lambda M \sin. \theta = \lambda M \theta$. Praeterea vero huius vis momentum respectu puncti g erit $= \lambda M (c - b)$, quae tendet ad motum angularem augendum. Transferamus igitur primo omnes has vires in ipsum punctum g, vbi vires verticales se mutuo destruere debebunt, ob $O p = x = e + c$, ideoque constans; quod etiam inde patet, quod vis grauitatis deorsum tendens sit $= M$; pressio sursum vrgens $= M$; ex frictione autem oriatur vis verticalis $= \lambda M \theta$, quae, ob λ pariter infinite paruum, negligi potest. Vires autem horizontales hinc oriundae et motui contrariae erunt $- M \theta - \lambda M$, vnde oritur ista aequatio:

$$\frac{M d d y}{2 g d t^2} = - M \theta - \lambda M, \text{ siue } \frac{e d d \theta + c d d \Phi}{2 g d t^2} = - \theta - \lambda.$$

§. 10. Pro motu autem gyratorio, pressio in $a = M$ dederat momentum motui contrarium $M (\Phi - \theta) c$: nunc autem frictio praebet momentum accelerans $= \lambda (c - b) M$, vnde principia motus suppeditant hanc aequationem:

$$\frac{M k k d d \Phi}{2 g d t^2} = \lambda (c - b) M - M (\Phi - \theta), \text{ siue}$$

$$\frac{k k d d \Phi}{2 g d t^2} = \lambda (c - b) - c (\Phi - \theta),$$

quae porro diuisa per $c - b$ dat,

$$\frac{k k d d \Phi}{2 g (c - b) d t^2} = \lambda - \frac{c (\Phi - \theta)}{c - b},$$

cui aequationi si addatur ante inuenta, quantitas incognita λ ex calculo elidetur, atque totus motus hac vnica aequatione

tione exprimetur:

$$\frac{e\,dd\theta + c\,dd\Phi}{2g\,dt^2} + \frac{kk\,dd\Phi}{2g(c-b)\,dt^2} = -\theta - \frac{c\Phi + c\theta}{c-b} = \frac{b\theta - c\Phi}{c-b}.$$

§. 11. Cum hac autem aequatione coniungi debet conditio principalis ante deſcripta, qua eſſe debet $\theta = -\frac{b\Phi}{e}$, vnde fit $dd\theta = -\frac{bdd\Phi}{e}$, quibus valoribus ſubſtitutis aequatio inuenta hanc induet formam:

$$\frac{(c-b)\,dd\Phi}{2g\,dt^2} + \frac{kk\,dd\Phi}{2g(c-b)\,dt^2} = -\frac{\Phi(bb+ce)}{e(c-b)},$$

haec per $c-b$ multiplicata praebet:

$$\frac{((c-b)^2 + kk)\,dd\Phi}{2g\,dt^2} = -\frac{\Phi(bb+ce)}{e},$$

quae vnicam variabilem Φ, praeter tempus t inuoluit, ac manifeſto motum oſcillatorium regularem indicat. Quodſi enim breuitatis gratia ponamus $\frac{ekk + e(c-b)^2}{bb+ce} = h$, haec forma ſimplex reſultabit: $\frac{h\,dd\Phi}{2g\,dt^2} = -\Phi$, cuius integratio nobis largitur hunc valorem: $\Phi = \alpha\,\text{ſin.}\,(t\sqrt{\frac{2g}{h}} + \delta)$; vnde patet, huius penduli motum perfecte conformem futurum eſſe oſcillationibus penduli ſimplicis, cuius longitudo

$$h = \frac{e(kk + (c-b)^2)}{bb+ce},$$

ſiue ſingulae oſcillationes abſoluentur tempore

$$t = \pi\sqrt{\frac{h}{2g}}\ \text{min. ſecund.}$$

§. 12. Cum igitur, ſemota frictione, huiusmodi pendula infinitis diuerſis modis ad motus oſcillatorios tam regulares quam irregulares concitari queant, maxime memorabile eſt, quod ob frictionem omnes iſtae diuerſae motuum ſpecies ad vnicam, eamque regularem, redigantur; quandoquidem oſcillationes hinc oriundae omnino congru-

ent

ent cum oſcillationibus penduli ſimplicis, cuius longitudo eſt $b = \frac{e(kk + (c - b)^2)}{bb + ce}$, quae quantitas quemadmodum ex elementis pendulum conſtituentibus componatur, accuratius perpendiſſe iuuabit.

§. 13. Conſideremus igitur noſtrum pendulum in ſtatu quietis, quoniam vniusmodi tantum motu oſcillatorio cieri poteſt, ſitque O centrum curuaturae fulcri MAN, ex quo ducta verticali O A G, poſuimus radium curuaturae fulcri $OA = a$. Axis cylindricus penduli incumbat fulcro in ipſo puncto A, cuius radius poſitus eſt $CA = b$; tum vero ſit vt ſupra interuallum $OC = a - b = e$, centrum autem grauitatis totius penduli verſetur in puncto G, exiſtente interuallo $CG = c$. Praeterea poſito pondere totius penduli $= M$, eius momentum inertiae reſpectu puncti G vocauimus $= Mkk$. Haec ſunt elementa ſtatum penduli propoſiti conſtituentia, ex quibus ergo, vti vidimus, longitudo penduli ſimplicis iſochroni b ita formatur, vt ſit $b = \frac{e(kk + (c - b)^2)}{bb + ce}$, cuius expreſſionis naturam propius examinemus.

Tab. V. Fig. 5.

§. 14. Cum momentum inertiae totius penduli, reſpectu axis per ipſum centrum grauitatis G ducti, ſit $= Mkk$, ob diſtantiam $AG = c - b$ erit eiusdem momentum inertiae reſpectu axis per ipſum punctum A ducti $= Mkk + M(c - b)^2$, quod ſi breuitatis gratia ponatur $= Mff$, vt ſit $ff = kk + (c - b)^2$, erit longitudo penduli ſimplicis iſochroni $b = \frac{eff}{bb + ce}$; ad quam expreſſionem vlterius euoluendam ducamus ex puncto O tangentem axis cylindrici OT, et ex T ad rectam verticalem agamus

 norma-

normalem T P, et quia triangulum O C T ad T eſt rectangulum, ideoque ſimile triangulo C T P, erit O C : C T = C T : C P, hoc eſt $e : b = b : \mathrm{CP}$, ideoque $\mathrm{CP} = \frac{bb}{e}$; quare cum ſit $\mathrm{CG} = c$, erit interuallum $\mathrm{GP} = \frac{bb + ce}{e}$. Introducto igitur hoc interuallo G P, erit $h = \frac{ff}{\mathrm{GP}}$, quae ergo expreſſio ſatis ſimplex exhibet longitudinem penduli ſimplicis iſochroni.

§. 15. Hic aſſumſimus centrum curuaturae fulcri O ſupra circulum, qui baſin axis cylindrici refert, cadere; ſin autem iſtud punctum O intra hunc circulum caderet, attamen ſupra eius centrum C, vt iam eſſet $\mathrm{CO} = e$, tum ex O ducta applicata O T, ex T agatur tangens iſtius circuli T P, rectae verticali occurrens in P; et quia triangula O C T et C T P denuo ſunt ſimilia, erit C O : C T = C T : C P, hoc eſt $e : b = b : \mathrm{CP}$, ita vt ſit $\mathrm{CP} = \frac{bb}{e}$, quamobrem hoc caſu longitudo penduli iſochroni erit $h = \frac{ff}{\mathrm{GP}}$, vt ante. Ex quo patet puncta O et P inter ſe permutari poſſe, ſimulque intelligitur, hoc poſteriori caſu, quo G P maiorem obtinet valorem, oſcillationes fore frequentiores, quam caſu praecedenti.

Tab. V. Fig. 6.

§. 16. Quodſi punctum O in ipſum centrum C incidat, punctum P in infinitum remouebitur, fietque $h = 0$ id quod etiam inde patet, quod ſit $e = 0$. Manifeſtum autem eſt hoc caſu cauitatem fulcri accurate excipere axem cylindricum, eumque propterea immotum retineri, ita vt nullae plane oſcillationes fieri queant. Sin autem punctum O intra centrum C verſus A cadat, ita vt curuatura

fulcri

fulcri minor foret quam curuatura axis cylindrici, tum cylindrus nequidem fulcro incumbere poſſet, ſicque omnis motus oſcillatorius prorſus tolleretur.

§. 17. At vero ſi punctum O infra A cadat, fulcrum ſuperne conuexum eſſet futurum, et quantitas e euaderet negatiua. Ponatur igitur pro hoc caſu $e = -i$ fietque

$$h = -i\frac{(kk+(c-b)^2)}{bb-ci},\ \text{ſiue}\ h = i\frac{(kk+(c-b)^2)}{ci-bb},$$

qui ergo valor, quoties fuerit $bb > ci$, erit negatiuus, ideoque nullus plane motus oſcillatorius contingere poſſet, ſed potius axis cylindricus ſuper tali fulcro delaberetur, ſimulac minimus motus ipſi tribueretur.

§. 18. Conſideremus igitur caſum, quo fulcrum ſuperne eſt conuexum, cuius centrum curuaturae cadat in O, ita vt iam ſit $CO = i$, exiſtente $CG = c$. Ex O ducatur tangens axis cylindrici OT, et ex T ducta horizontali TP, euidens eſt fore $CP = \frac{bb}{i}$, ideoque $c - \frac{bb}{i} = GP$. Quare cum etiamnunc ſit $ff = kk + (c-b)^2$, longitudo penduli ſimplicis iſochroni hoc caſu erit $h = \frac{ff}{GP}$, quae ergo ſemper erit poſitiua, dummodo centrum grauitatis G non ſupra punctum P aſcendat, id quod in motu vacillatorio ſeu nutatorio euenire poſſet. Prouti autem pendulum hic contemplamur, vt centrum grauitatis in fulcrum cadat, motus ſemper oſcillatorius realis ſequetur, qui eo erit frequentior, quo maius fuerit interuallum GP.

Tab. V. Fig. 7.

§. 19. His igitur in genere obſeruatis operae pretium erit annotaſſe, ſi axis cylindricus omni craſſitie ca-

reat, ita vt ſit $b = 0$, tum longitudinem penduli ſimplicis iſcchroni fore $h = \frac{kk+cc}{c}$, vbi ob $CA = 0$ erit $AG = 0$, qui ergo caſus manifeſto conuenit cum motu penduli ordinarii, quod ex puncto A eſſet ſuſpenſum, quandoquidem momentum inertiae reſpecta puncti A eſt $= M(kk+cc)$, quod diuiſum per $M.AG$ ſecundum ea quae de motu pendulorum ſunt tradita, ſemper longitudinem penduli ſimplicis iſochroni exhibet.

§. 20. Hic immorari non opus eſſe cenſeo caſui, quo totum penduli corpus ſupra pauimentum eleuatur, ideoque etiam centrum grauitatis G: hoc enim caſu ob frictionem orietur ipſe ille motus vacillatorius, quem iam olim fuſius ſum perſcrutatus, quippe cuius oſcillationes ab ipſa frictione regulares reddentur. Praeſens quidem inveſtigatio multo latius patet, cum etiam ad pauimenta ſiue concaua, ſiue conuexa extendatur. Omnes autem variationes, quae hic occurrere poſſunt, ex ante expoſitis abunde elucefcunt, ſi modo centrum grauitatis G ſupra A eleuetur, ita vt ſuperfluum foret huic argumento diutius immorari, ſi modo haec regulo probe teneatur: quamdiu centrum grauitatis totius penduli G infra punctum illud P ſupra definitum incidat, tum ſemper motum oſcillatorium oriri poſſe, et longitudinem penduli ſimplicis iſochroni ſemper fore $h = \frac{ff}{gp}$, exiſtente Mff momento inertiae totius maſſae penduli, reſpectu axis per punctum contactus A ducti; quando autem centrum grauitatis G ſupra punctum P incidit, tum pendulum nullum plane motum oſcillatorium recipere poſſe, ſed a minima inclinatione eſſe prolapſurum.

DIS-

DISSERTATIONIS DE MOTV PROIECTILIVM IN AËRE RESISTENTE CONTINVATIO, TABVLAM BALLISTICAM VNIVERSALEM EXHIBENS.

Auctore
W. L. KRAFFT.

§. 1.

Quam Ill. Academiae haud ita pridem obtuli, de eodem hoc argumento dissertatio (*) methodum exponit, cuius ope satis facili quidem negotio tabulae construuntur ballisticae, ex quibus simplici duorum Logarithmorum additione pro datis iactibus quibuscunque eorundem computantur amplitudines, et ex quibus facilitate calculi non minore ex data scopi sub dato proiectionis angulo feriendi distantia datisque diametro globi et pondere, celeritas inuenitur initialis, globo, vt feriat scopum, tertiam

(*) vid. P. I. huius Tomi Actor. pag. 154.

imprimenda. Quae quamuis facili ex iſtis tabulis et ad practicum vſum commodo perficiantur calculo: tamen cum ſingulae pro ſingulis proiectionum angulis tabulae ſeparatim et computandae ſint et applicandae: ſi tabulas ad omnem balliſticum vſum extendere velis, haud exiguus earum requireretur numerus. Quod etſi poteſt momenti non ita magni incommodum videri: operam tamen non inutilem fore vt ſuſcipiam ſum arbitratus, ſi, in quam incidi, methodum hic minime operoſam exponerem, tabulam conſtruendi balliſticam generalem, ex qua vna eademque non pro quibuscunque ſolum globi diametro, pondere et celeritate initiali, ſed pro proiectionum quoque angulis quibuscunque, ſimplici trium Logarithmorum additione, iactuum amplitudines, vti etiam, hisce datis, debitae ipſis celeritates initiales computentur. Huc accedit, quod, cum prior methodus in praecedente diſſertatione expoſita, iactuum amplitudines praebeat veris aliquantum minores, haec altera hic exponenda easdem veris praebeat pari propemodum diſcrimine maiores, vnde copulando, ſi placeat, vtriusque methodi tabulas bini veritatis iique vtplurimum ſatis ſibi vicini habebuntur limites, quos inter ſumto medio, minor certe erit calculi a veritate aberratio, quam ipſius in tormentorum exploſione praxis incertitudo, (*) quam ſi intuemur, quo methodus quaeque absque nimio a veritate receſſu eſt ad praxin adcommodatior, eo magis praeſtare etiam iis videtur, quae, cum inſignem ſibi theoriae rigorem vindicent, applicationis difficultate non minori laborant. Talis igitur commodae

(*) vid. Cours de Mathemathiques a l'uſage du Corps Royal de l'Artillerie par M. Bezout. Tom. IV. p. 441.

dae approximationis, licet ei, in fuperiori differtatione expofitae, theoriae rigorem quod attinet, aliquantum inferioris, fed ad tabulae ballifticae generalis conftructionem facile applicabilis, breviter exponam principia, fubiungam tabulam ad eius praecepta a me computatam, eiusque vfum exemplis illuftrabo.

§. 2. Binarum approximationum, quas in praecedentis differtationis §. 2. ex mente Cel. *Bezoutii* expofui, prior in hoc confiftit, vt, traiectoriae coordinatis orthogonalibus x et y ex puncto proiectionis fuper linea horizontali fumtis, vocatoque Φ angulo, fub quo elementum curuae ad horizontem inclinatur, fuerit

$$x = \frac{D}{a}. \text{Log. hyp.} \frac{C - a. \text{tang.} \Phi}{C - a. \text{tang. I}} \text{ et}$$

$$y = \frac{D}{a}\left(\frac{C}{a} \text{Log. hyp.} \frac{C - a \text{ tang.} \Phi}{C - a \text{ tang.I}} + \text{tang.} \Phi - \text{tang. I}\right)$$

in quibus formulis habetur

$$a = \tfrac{1}{2} \text{fec.} \Phi + \tfrac{1}{2} \text{cot.} \Phi \text{ Log. hyp.} (45^\circ + \tfrac{1}{2} \Phi)$$

$$C = \frac{\delta P}{2 \lambda c^2 . \text{cof. I}^2} + \tfrac{1}{2} \text{tang. I. fec. I} + \tfrac{1}{2} \text{Log. hyp.} (45^\circ + \tfrac{1}{2} \text{I})$$

$$D = \frac{P}{4 \lambda g},$$

defignante P pondus, δ diametrum et c celeritatem initialem globi debitam altitudini $= h$, I angulum proiectionis, λ hypothefin pro lege refiftentiae aëris affumtam et g altitudinem, ex qua grauia prope terrae fuperficiem primo minuto fecundo ex quiete libere delabuntur. Quantitati vero a valorem cum Cel. *Bezoutio* pro tota traiectoria conftantem atque eum quidem tribuamus, quem ipfo iactus initio obtinet, et quem in ipfa valoris fui exigua variabi-

 lita-

litate (*) diutiſſime ſeruat, qua admiſſa hypotheſi erit:

$$a = \tfrac{1}{2}\,\text{ſec.}\,\mathrm{I} + \tfrac{1}{2}\,\text{cot.}\,\mathrm{I}.\ \text{Log. hyp.}\,(45^\circ + \tfrac{1}{2}\mathrm{I}).$$

Ratiocinio autem ei, quod in praec. diſſ. §. 3. adhibuimus, analogo facile concluditur, iactuum amplitudines hac hypotheſi ex iſtis formulis prodire veris aliquantum maiores, Cum enim ſit

$$x = \tfrac{D}{a}\ \text{Log. hyp.}\left(1 + \frac{\text{tang. I} \mp \text{tang. } \Phi}{\frac{C}{a} - \text{tang. I}}\right)$$

vbi ſignum inferius pro traiectoriae ramo aſcendente, ſuperius vero pro deſcendente valet, in quo ſcilicet angulus Φ negatiuos valores obtinet, et cum valor ipſius *a* initialis, qui ipſi tanquam conſtans per totam traiectoriam tribuitur, ſit omnium eorum maximus, quos non in toto ſolum ramo aſcendente, ſed in rami quoque deſcendentis parte inter curuae verticem atque illud eius punctum, in quo traiectoriae ad horizontem obliquitas angulo proiectionis aequatur, intercepta reuera ſucceſſiue obtinet; patet, valores ipſius *x* ramo aſcendenti et modo dictae deſcenden-

---

(*) *Ita verbi cauſſa,*

ſi fuerit I	*erit a*
0°	1, 00000.
25°	1, 03514.
45°	1, 14779.
65°	1, 53433.
75°	2, 20349.

Ceterum valores a pro omnibus angulis I *repeti poſſunt ex tabula, quae infra occurrit ſub titulo tabulae reductionis, vbi habetur log.* B = *log.* $\frac{1}{a}$.

dentis parti competentes hac hypothesi veris maiores reddi; ab eo autem inde puncto cum valor ipsius a initialis sit omnium eorum, quos in reliqua rami descendentis parte accipit, minimus; valores ipsius x quoad hanc partem iusto prodeunt minores; qua errorum partialium contrarietate totalis in excessu error partim imminuitur. (*) Ceterum etiam id hinc perspicere licet, momenti eo minoris esse hypothesis huius errorem, quo maior fuerit quantitas $\frac{C}{a}$, id est, quo minores fuerint proiectionum anguli et celeritates.

§. 3. Hisce igitur admissis, cum

posito $\frac{P}{2\lambda a.c^2.\,cos.\,I^2} = \alpha = \frac{P}{8\lambda a g h.\,cos.\,I^2}$ et

$tang.\,I - tang.\,\phi = tang.\,\psi$ sit

$C = a(\alpha + tang.\,I)$;

erit $x = \frac{D}{a}$ Log. hyp. $(1 + \frac{tang.\,\psi}{\alpha})$ et

$y = \frac{D}{a}(\frac{C}{a}$ Log. hyp. $(1 + \frac{tang.\,\psi}{\alpha}) - tang.\,\psi)$.

Quare si nulla aut insensibilis foret aëris resistentia, ob $\lambda = 0$ hincque $\alpha = \infty$ et $a\alpha = C$, foret

$$x = \frac{D}{C}\,tang.\,\psi = 2\,h.\,cos.\,I^2.\,tang.\,\psi$$

vnde cum sit

$$dy = dx.\,tang.\,\phi = dx\,(tang.\,I - tang.\,\psi)$$

substituto valore $tang.\,\psi = \frac{x}{2\,h.\,cos.\,I^2}$ et integrali ita sumto, vt pro $x = 0$ euanescat; ordinaria ad Parabolam aequatio prodit. In aëre autem resistente et vniformiter denso ex aequationibus superioribus colligitur:

 1.)

(*) *Vid. Bezout loco citato.*

1.) *Altitudo iactus*

$= \frac{D}{a} \left(\frac{C}{a} \text{ Log. hyp. } \frac{C}{a\,\alpha} - \text{tang. I} \right)$

posito in ipsius y valore $\Phi = 0$, adeoque $\psi = \text{I}$.

2.) *Amplitudo iactus pro solo ramo ascendente*

$= \frac{D}{a} \text{ Log. hyp. } \frac{C}{a\,\alpha}$,

factis iisdem substitutionibus in aequatione pro x.

3.) Si appulsus globi ad horizontem recidentis sit obliquitas $= \zeta$; posito $\Phi = -\zeta$ in aequatione pro x et tang. ψ = tang. I + tang. $\zeta = \alpha \text{V}$, erit tota iactus amplitudo $= \frac{D}{a}$ Log. hyp. $(1 + \text{V})$, qui idem valor ipsius tang. ψ cum efficere debeat $y = 0$, erit

$$\text{Log. hyp. } (1 + \text{V}) = \frac{a\alpha \text{V}}{\text{C}}$$

ex qua aequatione logarithmica inuento valore V, erit

Tota iactus amplitudo $= \frac{\alpha \text{V}}{\text{C}} . \text{D}$.

4.) Inuento valore V habebitur *appulsus globi ad horizontem recidentis obliquitas* $= \zeta$ ex aequatione

$$\text{tang. } \zeta = \alpha \text{V} - \text{tang. I}.$$

5.) Cum designante u celeritatem globi in puncto traiectoriae quocunque debitam altitudini $= v$, sit ex prioris diff. §. 4.

$$u^2 = \frac{\text{P}}{2\lambda \operatorname{cos.} \Phi^2 \left(\text{C} - \int \frac{d\Phi}{\operatorname{cos.} \Phi^3} \right)}$$

$$= \frac{\text{P}}{2\lambda a \operatorname{cos.} \Phi^2 (\alpha + \text{tang. } \psi)} \text{ hincque}$$

$$v = \frac{\text{D}}{2 a . \operatorname{cos.} \Phi^2 (\alpha + \text{tang. } \psi)}$$

habebitur *altitudo debita celeritati globi*

in

in *vertice* traiectoriae $= \frac{D}{2C}$ et in *appulſu* ad horizontem $= \frac{D}{2a\alpha \cos. \zeta^2 (1 + V)}$.

§. 4. In formulis hisce ad iactus quoscunque applicandis, ſi, vti in diſſ. praeced. §. 3., menſuras in pedibus rhenanis, pondera vero in eiusmodi libris expreſſa ſupponamus, quarum 64 efficiunt pondus pedis aquae cubici rhenani, et ſi legem reſiſtentiae aëris, vti ſupra citato loco, deſignemus per μ, vt ſit $\lambda = 0,00047309.\ \mu.\ \delta^2$; ſequentia habebuntur totius calculi elementa ex data iactus conditione definienda:

$$\alpha = 1056,888.\ \frac{P}{\mu.\ a.\ \delta^2.\ c^2.\ \cos.\ I^2}$$

$$C = a\,(\alpha + \text{tang. } I)$$

$$D = 33,82045.\ \frac{P}{\mu.\ \delta^2}.\ \text{ped. rhen.}$$

ſecundum quae iam ad calculum aliquot exempla reuocemus, vſui nobis futura ad comparationem tabulae generalis balliſticae cum formulis fundamentalibus; vbi quidem, Ill. *Euleri* de aëris reſiſtentia hypotheſin ſecuti, ſupponamus, vt ſupra, $\mu = 3,0615$.

Exemplum I.

Globus, diametri 6 poll. rhen. et ponderis 57, 6. libr., quarum 64 efficiunt pondus pedis aquae cubici rhenani, proiicitur ſub angulo 45° celeritate initiali $= 485,7$ ped. rhen.

Hinc ergo erit

$P = 57,6$; $\delta = 0,5$; $c = 485,7$. $I = 45°$. $a = 1,14779$.
quibus ex iactus conditione datis inuenitur

$\alpha = 0,5875010$; $C = 1,822118$;
$D = 2545,2$. ped. rhen.
et aequatio logarithmica

$$\text{Log. tab.}\,(1 + V) = 0,1607237 \cdot V,$$

ſuppeditat $V = 4,7056001$. (*)

In-

(*) *In hunc finem aequationes* Log. tab. $(1 + V) = m.V$ *commode ita reſoluuntur*: Cum *facile reperiantur bini numeri integri, inter quos cadit verus ipſius V valor; ſit numerus integer proxime ſatisfaciens* $= U$ *et* Log. tab. $(1 + U) - m.U = e$, *deſignante e errorem ſuppoſitionis* $V = U$. *Ex aequatione*

$$dU\left(m - \frac{1}{2,302585(1+U)}\right) = e,$$

quaeratur dU, *eritque exactius* $V = U + dU = U'$. *Sit ſimili modo*

$$\text{Log. tab.}\,(1 + U') - m.U' = e';$$

quaeratur dU' *ex aequatione*

$$dU'\left(m - \frac{1}{2,302585(1+U')}\right) = e';$$

eritque $V = U' + dU'$; *et ita porro, ſicque ſatis prompte verus ipſius V valor iauenietur. Ita v. c. in hoc exemplo eſt* $U = 5$. *et* $e = -0,0254672$; *hinc* $dU = -0,3518416$; *adeoque*

$U' = 4,6481584$; *at* $e' = +0,0048376$;
hinc $dU' = +0,0577058$;
adeoque $U'' = 4,7058642$.
at $e'' = -0,0000226$; *hinc* $dU'' = -0,0002641$.
adeoque $U''' = 4,7056001$.

qui valor exacte ſatisfacit.

Inuentis hisce elemeutis ſequentes prodeunt ex ſuperioribus formulis iactus huius determinationes, quibus adiungamus differentias a determinationibus eiusdem iactus per methodum praeced. diff. inuentis:

	Ped. rhen.	diff. a priori meth.
Altitudo iactus - - -	1281, 7.	$+ 45 = \frac{1}{28}$.
Amplit. rami aſcend. - -	2204, 2.	$+ 71 = \frac{1}{31}$.
Amplit. iactus tota - - -	3861, 7.	$+ 88 = \frac{1}{44}$.
Celer. globi in vertice -	208, 9.	0
Celer. globi recid. - - -	291, 5.	$+ 16 = \frac{1}{18}$,
Ang. recidentiae - - -	60°. 27′.	+ 3′.

Minorem eſſe pro minoribus proiectionum angulis vtriusque methodi diſcrepantiam, ſequenti exemplo patebit:

Exemplum 2.

Bombarda, diametri vnius pedis rhen. et ponderis 138 libr. quarum 64 efficiunt pondus pedis aquae cubici rhen. proiicitur ſub angulo 15°. celeritate initiali = 400. ped. rhen. Quaeritur ſuper plano horizontali amplitudo iactus, quae ex Belidorii experimento inuenta eſt 1705. ped. rhen.; ex priori methodo 1699, 4. ped. rhen. et ex tab. *Eulerianis* 1719. ped. rhen.

Cum ergo hic ſit

$$P = 138;\ \delta = 1;\ c = 400;$$

$$I = 15°.\ \text{et}\ a = 1,01184,$$

colligitur

$$\alpha = 0,3153948.\ C = 0,5902508;$$

$$D = 1524,5.\ \text{ped. rhen.}$$

et

et aequatio logarithmica

$$\text{Log. tab.}\,(1+V) = 0,2348092.\,V$$

ſuppeditat

$$V = 2,081570.$$

Vnde prodit amplitudo iactus = 1696. ped. rhen. quae ergo a neutra praecedentium determinationum ſenſibiliter differt.

Exemplum 3.

Globus exempli primi proiicitur ſub angulo 60° celeritate initiali 475, 95. ped. rhen. Quaeritur amplitudo iactus ſuper plano horizontali.

Erit ergo pro hoc iactu

$$P = 57,6;\ \delta = 0,5;$$

$$c = 475,95;\ I = 60°;\ \text{et}$$

$$a = 1,38017.$$

vnde colligitur

$$\alpha = 1,0176117;$$

$$C = 3,7950018;$$

$$D = 2545,2.\ \text{ped. rhen.}$$

et aequatio logarithmica

$$\text{Log. tab.}\,(1+V) = 0.1607266.\,V,$$

ſuppeditat

$$V = 4,705600.$$

vnde prodit amplitudo iactus = 3211,4. ped. rhen.

§. 5.

§. 5. Facile quoque huius methodi ope ex data ſcopi feriendi diſtantia ſiue iactus cuiusdam probatorii amplitudine celeritas globi initialis inuenitur. Poſita ſcilicet iſta diſtantia ſeu amplitudine $= \Omega$, et breuitatis gratia $\frac{\alpha V}{C} = k$, erit $\Omega = k D$; et $a k =$ Log. hyp. $(1 + V)$, hincque $e^{ak} - 1 = \frac{Ck}{\alpha}$ denotante e numerum, cuius logarithmus hyp. $= 1$, ex qua aequatione ſubſtitutis pro C et α valoribus, prodit

$$c^2 = \frac{P}{\lambda\, a.\, \text{ſin.}\, 2\, I}\left(\frac{e^{ak} - a k - 1}{a k}\right).$$

Cum iam ſit

$$k = \frac{\Omega}{D} = \frac{\mu.\, \delta^2.\, \Omega}{33,\, 82045.\, P}$$

adeoque ex iactus conditione cognitum; ſumatur numerus m talis, vt ſit $a k =$ Log. hyp. $(1 + m a k)$ adeoque

$$0,4342955.\, a k = \text{Log. tab.}\, (1 + m a k),$$

eritque

$$c^2 = \frac{(m - 1).\, P}{\lambda\, a.\, \text{ſin.}\, 2\, I} = \frac{2113,776\, (m - 1).\, P}{\mu.\, a.\, \delta^2.\, \text{ſin.}\, 2\, I}.$$

Ita verbi cauſſa in exemplo II. praecedentis §. erat $\Omega = 1696$. ped. rhen; $P = 138$; $\delta = 1$; $I = 15°$ et $a = 1,01184$, vnde reperitur $m = 1,849541$ et $c = 399,99$. ped. rhen., quod cum celeritate initiali iſtius iactus prorſus coincidit.

§. 6. Duplici modo ex methodo hic tradita tabulae balliſticae conſtrui poſſunt:

1) Primo enim, ſi ponamus, aëris reſiſtentiam in globum in ipſo proiectionis momento ſeu reſiſtentiam aëris initialem eſſe ad pondus globi in ratione $n : 1$;

$n : 1$; erit $\lambda c^2 = n$ P. hincque $b = n$ D, ita, vt quantitas D, in ſuperioribus calculis introducta, deſignet altitudinem debitam celeritati, qua ſi proiiceretur globus, foret in ipſum initialis aëris reſiſtentia ipſius ponderi aequalis. Poſito itaque $\lambda c^2 = n$ P, erit $\alpha = \frac{1}{2 n. a. coſ. I^2}$; vnde valores α, hincque etiam valores V vnice a quantitate n et angulo I pendebunt. Aſſumtis itaque pro n valoribus hypotheticis ſatis ſibi vicinis, totidem reſultarent tabulae balliſticae argumenti $= n$, in quibus ſingulis pro ſingulis proiectionum angulis I exhiberentur valores $\frac{\alpha V}{C}$, qui in reſpondentes valores D ducti darent quaeſitam iactus dati amplitudinem. Ita verbi cauſſa tabula argumenti $n = 1$ complecteretur omnes illos iactus, pro quibus initialis aëris in globos reſiſtentia ipſorum ponderibus foret aequalis. Cum vero hoc modo non tabularum modo numerus nimium excreſceret, ſed interpolationis quoque neceſſitas pro caſu valoris n inter binarum tabularum argumenta intermedii haud parum difficultatis gigneret; conſultius vtique foret pro ſingulis proiectionum angulis conſtruere tabulas. Percommode autem

a) in poſteriori hac methodo hic expoſita accidere reperi, vt talis tabula conſtrui poſſit, ex qua vna eademque iactuum amplitudines pro omnibus iactibus quibuscunque ſimplici trium Logarithmorum additione computari queant, ita, vt tabula talis balliſtica vniuerſalis ad omnem hoc intuitu vſum practicum ſufficere vna poſſit.

Si

Si ſcilicet ſit angulus proiectionis $= \eta$ et celeritas initialis $= \gamma$ et correſpondentes valores a et k; erit ex praecedente §pho,

$$\gamma^2 = \frac{P}{\lambda a. \text{ſin. } 2\eta} \left(\frac{e^{ak} - ak - 1}{ak} \right) \text{ et } \Omega = k D.$$

Quodſi iam idem globus ſub alio proiectionis angulo $= I$ alia celeritate initiali $= c$ proiiciatur, ſintque correſpondentes valores a' et k'; erit ſimili modo

$$c^2 = \frac{P}{\lambda . a'. \text{ſin. } 2 I} \left(\frac{e^{a'k'} - a'k' - 1}{a'k'} \right) \text{ et } \Omega' = k'. D.$$

Si igitur γ ita capiatur, vt ſit

$$\gamma^2 = c^2 . \frac{a'. \text{ſin. } 2 I}{a. \text{ſin. } 2\eta}$$

erit $ak = a'k'$ et $\Omega' = \Omega . \frac{a}{a'}$; ita, vt hinc detur relatio inter Ω et Ω', id eſt inter amplitudines binas iactuum eiusdem globi, celeritate initiali γ ſub angulo η et celeritate initiale c ſub angulo I factorum; vnde data vna harum amplitudinum etiam altera dabitur. Quodſi ergo ſit exempli cauſſa $\eta = 45°$, hincque $a = 1, 14779$; erit

$$\gamma^2 = 0, 8712394 . c^2 . a'. \text{ſin. } 2 I.$$

Si ergo globus celeritate initiali $= c$ ſub angulo $= I$ fuerit proiectus, et pro celeritate initiali $= \gamma$ quaſi fictitia computetur ſub angulo 45° eiusdem globi amplitudo iactus, eaque ſit $= \Omega$; erit eiusdem globi ſub angulo $= I$ celeritate initiali $= c$ proiecti amplitudo iactus,

$$\Omega' = \Omega . \frac{1, 14779}{a'}.$$

§. 7. Patet ex praecedentibus, tabulam pro angulo proiectionis quocunque dato $= \eta$ conſtructam ratione modo expoſita ad omnes proiectionis angulos facile

applicari posse. Sit verbi caussa $\eta = 45^\circ$, eritque

$$\alpha = 601,53814.\frac{P}{\delta^2\, c^2}$$

$$\text{Log. tab. } (1 + V) = 0,43429.\frac{\alpha V}{1+\alpha}$$

et amplitudo iactus $= 9,624594.\frac{\alpha V}{1+\alpha}.\frac{P}{\delta^2}$.

Cum iam pro tabulae argumento $\frac{P}{\delta^2\, c^2}$ valores arbitrarios assumere liceat, eosdem ipsi valores successiue tribuamus, qui tabulae in priori dissertatione exhibitae argumenta constituunt; vnde pro singulis hisce valoribus $\frac{P}{\delta^2\, c^2}$ ex modo allatis aequationibus habebuntur valores correspondentes α et V, quibus inuentis in tabula exhibebuntur valores $9,624594.\frac{\alpha V}{1+\alpha}$, qui in $\frac{P}{\delta^2}$ ducti dant iactuum amplitudines. Talis tabula vt ad omnes proiectionum angulos valeat: perspicitur ex praecedenti §pho, in computando dati iactus argumento $\frac{P}{\delta^2\, c^2}$ loco c^2 substitui debere $c^2.\frac{a'.\, \sin. 2 I}{a.\, \sin. 2\eta}$, et amplitudinem iactus hoc argumento ex tabula inuentam multiplicari debere per $\frac{a}{a'} = \frac{1,14779}{a'}$. Posito itaque breuitatis gratia

$$\frac{a' \sin. 2 I}{a.\, \sin. 2\eta} = 0,8712394.\, a'.\, \text{sin. } 2 I = \frac{1}{A} \text{ et } \frac{1}{a'} = B;$$

qui itaque valores A et B vnice ab angulo proiectionis pendent; argumentum ex data propositi iactus conditione computandum erit $= \frac{A.P}{\delta^2\, c^2}$; in ipsa tabula exhibebitur

$$\text{Log. } 9,624594. \times 1,14779.\frac{\alpha V}{1+\alpha}$$

ad quem, additis Logarit. $\frac{P}{\delta^2}$ + Log. B, habebitur log. amplitudinis quaesitae.

Tali modo constructa est sequens Tabula ballistica generalis, praemissa Tabula reductionis, quae pro singulis proiectionum angulis exhibet Log. A et Log. B.

TABV-

CTIONIS.

Log. B	I	Log. A.	Log. B.
9775469.	60.	9, 9823992.	9, 8600673.
9758140.	61.	9, 9834074.	9, 8519654.
9739941.	62.	9, 9846513.	9, 8433630.
9720799.	63.	9, 9861148.	9, 8342099.
9700727.	64.	9, 9877983.	9, 8244679.
9682039.	65.	9, 9896897.	9, 8140812.
9657567.	66.	9, 9917788.	9, 8029898.
9634228.	67.	9, 9940599.	9, 7911315.
9609827.	68.	9, 9965153.	9, 7784241.
9586034.	69.	9, 9991463	9, 7647947.
9557347.	70.	0, 0019316.	9, 7501366.
9529121.	71.	0, 0048657.	9, 7343452.
9499491.	72.	0, 0079311.	9, 7172873.
9468370.	73.	0, 0111167.	9, 6988159.
9435716.	74.	0, 0144045.	9, 6787517.
9401375.	75.	0, 0177814.	9, 6568889.
9365128.	76.	0, 0212254.	9, 6329722.
9827356.	77.	0, 0247192.	9, 6066987.
9287589.	78.	0, 0282418.	9, 5776926.
9245515.	79.	0, 0317654.	9, 5454783.
9201351.	80.	0, 0352653.	9, 5094545.
9154844.	81.	0, 0387168.	9, 4688367.
9105824.	82.	0, 0420786.	9, 4225542.
9054136.	83.	0, 0453223.	9, 3691350.
8999639	84.	0, 0484035.	9, 3064199.
8942072.	85.	0, 0512710.	9, 2310787.
8881296.	86.	0, 0538729.	9, 1375657.
8817022.	87.	0, 0561401.	9, 0041552.
8749028.	88.	0, 0579898.	8, 8417118.
8677019.	89.	0, 0592973.	8, 5422540.
8600673.			

TABVLA REDVCTIONIS.

I	Log. A.	Log. B.	I	Log. A.	Log. B	I	Log. A.	Log. B.
0.	∞	0, 0000000.	30.	0, 0998788.	9, 9775469.	60.	9, 9823992.	9, 8600673.
1.	1, 5170217.	9, 9999784.	31.	0, 0897416.	9, 9758140.	61.	9, 9834074.	9, 8519654.
2.	1, 2161911.	9, 9999131.	32.	0, 0801964.	9, 9739941.	62.	9, 9846513.	9, 8433630.
3.	1, 0404326.	9, 9998047.	33.	0, 0712122.	9, 9720799.	63.	9, 9861148.	9, 8342099.
4.	0, 9159556.	9, 9996484	34.	0, 0627693.	9, 9700727.	64.	9, 9877983.	9, 8244679.
5.	0, 8196413.	9, 9994490.	35.	0, 0550806.	9, 9682039.	65.	9, 9896897.	9, 8140812.
6.	0, 7411853.	9, 9992017	36.	0, 0474129.	9, 9657567.	66.	9, 9917788.	9, 8029898.
7.	0, 6750986.	9, 9989113.	37.	0, 0404437.	9, 9634228.	67.	9, 9940599.	9, 7911315.
8.	0, 6181023	9, 9985779.	38.	0, 0339411.	9, 9609827.	68.	9, 9965153.	9, 7784241.
9.	0, 5680729.	9, 9981928.	39.	0, 0280615.	9, 9586034.	69.	9, 9991463	9, 7647947.
10.	0. 5235756.	9, 9977648.	40.	0, 0222457.	9, 9557347.	70.	0, 0019316.	9, 7501366.
11.	0, 4835769.	9, 9972898.	41.	0, 0170218.	9, 9529121.	71.	0, 0048657.	9, 7343452.
12	0, 4473127.	9, 9967635.	42.	0, 0121973.	9, 9499491.	72.	0, 0079311.	9, 7172873.
13.	0, 4142111.	9, 9961906.	43.	0, 0077587.	9, 9468370.	73.	0, 0111167.	9, 6988159.
14.	0, 3843104	9, 9960572.	44.	0, 0036987.	9, 9435716.	74.	0, 0144045.	9, 6787517.
15.	0, 3557807.	9, 9948882.	45.	0, 0000000.	9, 9401375.	75.	0, 0177814.	9, 6568889.
16.	0, 3298119.	9, 9941591	46.	9, 9966399.	9, 9365128.	76.	0, 0212254.	9, 6329722.
17.	0, 3056807.	9, 9933799.	47.	9, 9936573.	9, 9327356.	77.	0, 0247192.	9, 6066987.
18.	0, 2831863.	9, 9925425.	48.	9, 9910070.	9, 9287589.	78.	0, 0282418.	9, 5776926.
19.	0, 2621674.	9, 9916469.	49.	9, 9886612.	9, 9245515.	79.	0, 0317654.	9, 5454783.
20.	0, 2424929.	9, 9906979.	50.	9, 9866461.	9, 9201351.	80.	0, 0352653.	9, 5094545.
21.	0. 2240346.	9, 9896830.	51.	9, 9849425.	9, 9154844.	81.	0, 0387168.	9, 4688367.
22.	0, 2067025.	9, 9886113	52.	9, 9835408.	9, 9105824.	82.	0, 0420786.	9, 4225542.
23.	0, 1904032.	9, 9874748.	53.	9, 9824345.	9, 9054136.	83.	0, 0453223.	9, 3691350.
24.	0, 1750586.	9, 9862696.	54.	9, 9816201.	9, 8999639	84.	0, 0484035.	9, 3064199.
25.	0, 1606094.	9, 9850009.	55.	9, 9810839.	9, 8942072.	85.	0, 0512710.	9, 2310787.
26.	0, 1469909.	9, 9836605.	56.	9, 9808262.	9, 8881296.	86.	0, 0538729.	9, 1375657.
27.	0, 1341539.	9, 9822490.	57.	9, 9808345.	9, 8817022.	87.	0, 0561401.	9, 0041552.
28.	0, 1220473.	9, 9807590.	58.	9, 9811051.	9, 8749028.	88.	0, 0579898.	8, 8417118.
29.	0, 1106374.	9, 9791954.	59.	9, 9816295.	9, 8677019.	89.	0, 0592973.	8, 5422540.
30.	0, 0998788.	9, 9775469.	60.	9, 9823992.	9, 8600673.			

TABVLA BALLISTICA GENERALIS.

Argumentum:

Pondus globi diuiſum per productum quadratorum diametri et celeritatis initialis globi et multiplicatum per numerum A ſiue $\frac{AP}{\delta^2 c^2}$.

Argumentum	Log. Coëfficient.	Log. Interpolat.
0, 000000.	∾	
0, 000072.	1, 7197767.	5, 0241314.
0, 000201.	1, 5890186.	4, 6966411.
0, 000336.	1, 5065430.	4, 4978278.
0, 000478.	1, 4414558.	4, 3468856.
0, 000628.	1, 3856185.	4, 2215682.
0, 000786.	1, 3358397.	4, 1120545.
0, 000954.	1, 2899125.	3, 0130146.
0, 001132.	1, 2469998.	3, 9215433.
0, 001322.	1, 2061346.	3, 8359431.
0, 001523.	1, 1672210.	3, 7546741.
0, 001737.	1, 1296999.	3, 6770444.
0, 001965.	1, 0932970	3, 6017018.
0, 002210.	1, 0575612.	3, 5286282.
0, 002471.	1, 0226612.	3, 4572118.
0, 002751.	0, 9882594.	3, 3870674.
0, 003052.	0, 9542131.	3, 3179522.
0, 003375.	0, 9205263.	3, 2617611.
0, 003723.	0, 8860333.	3, 1678920.
0, 004098.	0, 8536930.	3, 1141503.
0, 004503.	0, 8204094.	3, 0468370.
0, 004941.	0, 7871265.	2, 9797050.
0, 005415.	0, 7538071.	2, 9121912.

 Tabulam

Tabulam hanc vlterius continuari non eſt opus, cum ea hic tantum methodi demonſtrandae cauſſa exponatur, et cum, ſi pro ipſo forte vſu balliſtico ſit conſtruenda, ea quoque in eius conſtructione obſeruanda ſint, quae in diſſertationis prioris §pho 2. pag. 198. monuimus. Ceterum per ſe patet, hanc tabulam generalem, ſi prorſus fuerit ad finem perducta, ab argumento 0,000000 ad argumentum ∞ extendi adeoque non plures continere columnas horizontales, quam continet tabula in prioris diſſertationis §pho 8. pag. 180. exhibita.

§. 8. Vtriusque huius tabulae vſum paucae ſequentes oſtendent regulae et ſubiuncta illuſtrabunt exempla:

Problema.

Datis globi pondere $=$ P; diametro $= \delta$ et celeritate initiali $= c$ cum angulo proiectionis $=$ I; quaeritur amplitudo iactus ſuper plano horizontali.

Calculus ex ſuperiori tabula ita expedietur:

1) Exprimatur globi pondus in libris, quarum 64 efficiunt pondus aquae cubici rhenani et diameter globi eiusque celeritas initialis in pedibus rhenanis. Diuidatur pondus globi per productum quadratorum diametri et celeritatis initialis globi et multiplicetur per numerum A, dato proiectionis angulo in tabula reductionis adſcriptum; habebitur $\frac{AP}{\delta^2 c^2}$ *argumentum exempli*:

2) Cum hoc argumento in Tabula Balliſtica generali quaeratur argumentum vel aequale vel proxime minus,

minus, eique correſpondens excerpatur Logarithmus Coëfficientis et Logarithmus interpolatorius. Ad hunc Logarithmum Coëfficientis addatur Logarithmus ponderis globi per diametri quadratum diuiſi et Log. B, in tabula reductionis dato proiectionis angulo adſcriptus; numerus horum Logarithmorum ſummae reſpondens erit amplitudo iactus quaeſita in ped. rhen. expreſſa, ſi argumentum exempli cum argumento tabulae congruat.

3) Si vero differentia ſit notabilis: ad Log. Interpolatorium adde Log. differentiae, et Logarithmum ponderis globi per diametri quadratum diuiſi et Log. B; habebitur Log. Correctionis ab amplitudine iactus ſupra inuenta ſemper ſubtractiuae.

Secundum haſce igitur regulas tria exempla §pho 4. ex ipſis formulis fundamentalibus computata, iam ex tabula balliſtica generali ad calculum reuocemus:

Exemplum 1.

Globus diametri 6 poll. rhen. et ponderis 57, 6 libr., quarum 64 efficiunt pondus pedis aquae cubici rhen. proiicitur ſub angulo 45° celeritate initiali = 485, 7. ped. rhen. Quaeritur amplitudo iactus ſuper plano horizontali.

Cum pro hoc iactu ſit $P = 57,6$; $\delta = 0,5$; $c = 485,7$; $I = 45°$; hincque ex tabula reductionis

Log. A = 0, 0000000; et Log. B = 9, 9401375.

erit *Argumentum exempli* $= \frac{AP}{\delta^2 c^2} = 0,000977$.

Argu-

Argumentum tabulae proxime minus	= 0, 000954
cui respondet Log. Coëfficientis -	= 1, 2899125.
Adde Log. $\frac{P}{\delta^2}$ - - - - - -	= 2, 3624825
et Log. B - - - - - -	= 9, 9401375.
erit Log. amplitudinis prope verae	= 3, 5925325
Ergo amplitudo prope vera - -	= 3913. ped. rhen.
quae vt exactius definiatur	
ad differentiae argumentorum -	= 0, 000023
Logarithmum - - - - - -	= 5, 3617278
adde Log. Interpol. tabulae - -	= 4, 0130146
et Log. $\frac{P}{\delta}$ - - - - -	= 2, 3624825
et Log. B - - - - -	= 9, 9401375
habebitur Log. Correct. - - -	= 1, 6773624
Hinc correctio subtractiua - -	= 48. ped. rhen.
Adeoque amplitudo iactus vera -	= 3865. ped. rhen.

Exemplum 2.

Bombarda, diametri vnius pedis rhenani et ponderis 138 libr., quarum 64 efficiunt pondus pedis aquae cubici rhen. proiicitur sub angulo 15° celeritate initiali 400 ped. rhen. Quaeritur amplitudo iactus super plano horizontali.

Cum hic sit $P = 138$; $\delta = 1$; $c = 400$; $I = 15°$

Log. $A = 0, 3557807$; Log. $B = 9, 9948882$

erit *Argumentum exempli* $= \frac{AP}{\delta^2 c^2} = 0, 001957$.

Argum.

Argum. tab. proxime minus $= 0,001737$.

Differentia - - - $= 0,000220$

Calcul amplitud. prope verae		Calcul. Correctionis.	
Log. Coeff. -	$= 1,1296999$	$3,6770444$	$=$ Log. Inter.
adde Log. $\frac{P}{\delta^2}$ -	$= 2,1398791$	$2,1398791$	$=$ Log. $\frac{P}{\delta^2}$
et Log. B -	$= 9,9948882$	$9,9948882$	$=$ Log. B
Log. ampl. prope ver.	$= 3,2644672$	$6,3424227$	$=$ Log. Differ.
Amplitudo prope vera	$=$ 1[illegible]38, 5	$2,1542344$	$=$ Log. Corr.
Correctio subtr.	$= -142,6$	$142,6$	$=$ Correct.
Amplitudo vera	$= 1695,9$		

Exemplum 3.

Globus exempli primi proiicitur sub angulo 60° celeritate initiali 475, 95. ped. rhen. Quaeritur amplitudo iactus super plano horizontali.

Cum hic sit $P = 57,6$; $\delta = 0,5$; $c = 475,95$; $I = 60$

Log. $A = 9,9823992$; Log. $B = 9,8600673$.

erit Argumentum exempli $= \frac{AP}{\delta^2 c^2} = 0,000977$.

Argum. tab. proxime minus $= 0,000954$.

Differentia - - - $= 0,000023$.

Calcul amplitud. prope verae.		Calcul. Correctionis.	
Log. Coëffic. -	= 1, 2899125	4,0130146	= Log. interp.
Log. $\frac{p}{\delta^2}$ - -	= 2, 3624825	2,3624825	= Log $\frac{p}{\delta^2}$
Log. B - -	= 9, 8600673	9,8600673	= Log. B
		5,3617278	= Log. Differ.
Log. ampl. pr. verae	= 3, 5124623		
Amplit. prope vera	= 3254, 3	1,5972922	= Log. Corr.
Correctio ſubtr.	= − 39, 6	39,6	= Correctio.
Amplitudo vera	= 3214, 7		

ex quarum amplitudinum cum iis conſenſu, quas ſupra §. 4 ex ipſis formulis fundamentalibus pro his tribus iactibus obtinuimus, tabulae balliſticae generalis hic expoſitae ad quoscunque iactus omnesque proiectionum angulos facillima applicatio abunde confirmatur.

PHYSICA.

DE ORDINE

FIBRARVM MVSCVLARIVM CORDIS.

Auctore

C. F. WOLFF.

Dissertatio I.

De regionibus et partibus quibusdam, in corde, tunica exuto, notabilibus.

Ordo fibrarum ad mentem Loweri.

Quantum inter se discrepent, quantumque sibi mutuo contradicant, anatomicorum de fibris cordis sententiae, satis constat. Communes externas *Lowerus* ventriculo vtrique facit, (*a*) ortasque a tendinibus circularibus spiralium instar a dextris versus sinistra ad apicem vsque deducit, vbi in cauitatem ventriculorum penetrent, internasque fibras producant, sensu, externis contrario, a dextris versus sinistra ad basin adscendentes. Medias fibras *Lowerus* ignorat.

(*a*) Apud Senacum. Traité de la structure du coeur. Tom. I. Liv. Chap. II. §. 2.

Senaci.

Senacus, locupletiſſimus de corde Auctor, externas fibras, quae dextrum tegunt ventriculum, dextro, quae ſiniſtrum, ſiniſtro proprias, alteras ab alteris diſtinctas, eſſe affirmat. (*a*) Oriuntur externae mediaeque ventriculi dextri, quas a tendinibus deriuauerat circularibus *Lowerus*, ſecundum *Senacum* ab inferiori margine ſepti. (*b*) Tranſeunt inde externae, quas ad apicem *Lowerus* deduxerat, oblique deorſum, mediae ſurſum, in ſuperiorem marginem ſepti. (*c*) Internae, quae ſepto incumbunt, ab apice ad baſin adſcendunt; reliquae retiformes variis directionibus inordinate progrediuntur. (*d*) Mire ſiniſtri ventriculi fibras internas mediasque omnes, quin ipſas externas, a columnis carneis, cauitatem huius ventriculi occupantibus, *Senacus* deriuat, carnem cordis truncis ſuis, quibus parietibus implantantur, perforantibus, ad ſuperficiem vsque penetrantibus externam. (*e*) Inde ad ſua ſtrata mediae, externae ad externam ſuperficiem vsque variis in ſedibus peruentae, ea ratione, quaelibet in ſtratis ſuis, progrediuntur, vt internae a baſi oblique dextrorſum ad apicem deſcendant; (*f*) deinde, quo ſunt ſtrata, quae efficiunt, exteriora, transuerſali directioni propiores, et transuerſales ipſae euadant, denique et ſenſu internis contrario maxime in ipſo externo ſtrato, ab apice oblique dextrorſum ad baſin adſcendant, interiores decuſſando. (*g*)

Hal-

(*a*) Senac. l. c. Chap. IX. §. XV.
(*b*) Senac. l. c. Tom. I. Chap. IX. §. XIII,
(*c*) l. c. Chap. IX §. XIII.
(*d*) l. c. Chap. IX. §. XII. pag. 200.
(*e*) l. c. Chap. IX. §. X.
(*f*) l. c. Chap. IX § IX.
(*g*) l. c. Chap. IX. §. X. pag. 196.

Halleri.

Hallerus (*a*) generatim a ſede auriculae dextrae fibras oriri affirmat, quas alter priorum anatomicorum a tendinibus circularibus, alter ab inferiori margine ſepti deriuauerat; descendere inde per ſuperficiem cordis conuexam oblique ſiniſtrorſum ad apicem; flecti in eo ad ſuperficiem planam, vbi dextrorſum adſcendendo ad eandem auriculae dextrae ſedem redirent; cum contra in cauitatem ventriculi ad apicem has fibras intrare *Lowerus* docuiſſet, *Senacus* ad marginem ſepti deduxiſſet ſuperiorem. Strata caeterum in eo differre, monet *Hallerus*, vt exteriora interioraque longitudinali ductui, media inter illa transuerſali ſint propiora.

Winslowi.

Vix vllum *Winslowus* (*b*) principium aut initium fibris, vix finem vllis, aut certum progreſſum, aſſignat. Alias longiores, easque inflexas, vt angulum faciant, alias ſimpliciter in arcum curuatas, easdemque breuiores eſſe indicat. Illas imprimis externas et internas ventriculorum ſuperficies occupare; breuiores media efficere ſtrata, maxime ad baſin cordis. Quemuis ventriculum propriis ſuis fibris conſtare, at internas ſiniſtri (apicem ni fallor perforando,) externum ſtratum continuatas producere commune, quo vterque ventriculus includatur; vt cor duos ſaccos referat, in vno tertio communi incluſos. Denique alias dextrorſum progredi et finiri fibras, alias ſiniſtrorſum, alias autrorſum, alias retrorſum, et plures inter haec loca ter-

(*a*) Elem. Phyſiol. Tom. I. pag. 352.
(*b*) Expoſ. anatomique Tom. IV. pag. 93. 94. 95. 96.

terminari; nec, quaenam antrorſum aut retrorſum progrediantur aut terminentur, definit. Haec interim ſunt brevibus expoſita omnia, quae *ſolidiſſimus* Winslowus de ordine fibrarum cordis docet.

Vieuſſenii.

Maxime omnium mirifice *Vieuſſenius* (*a*) ab arteriis coronariis fibrarum cordis originem deducit, quas ductus eſſe putat, ex ipſis vltimis arteriarum finibus continuatos. Parique miraculo, at ſane concordanti, finem fibrarum, quem inſertionem in aliis muſculis vocare ſolemus, in principiis eſſe ſtatuit venarum; vt ortae ex arteriis fibrae in venas continuent, et ductus ergo ſint, his vaſis interpoſiti. Caeterum ab inferiori ſuperficie cordis fibras ventriculi dextri externas oriri docet, continuari inde oblique antrorſum et finiri ad apicem ventriculi. Siniſtri ventriculi fibras contra a baſi oriri; hinc progredi retrorſum oblique et finiri pariter ad ſui ventriculi apicem. Medias dextri ventriculi fibras oblique a baſi ad apicem deſcendere, ibique in fibras ſiniſtri ventriculi continuare. Ventriculi ſiniſtri medias quatuor ſtrata formare, directione diverſa. Internas vtriusque ventriculi papillas producere et columnas.

Caeterorum Auctorum obſeruationes.

Non minus et caeteri, quos recenſere ſuperſedeo, fibrarum cordis ſcriptores et ab illis, quos dixi, et inter ſe ipſos differunt. Vt vno me expediam verbo, quot Auctores, tot diuerſae de ortu, de progreſſu, de fine, de ordine et natura harum fibrarum ſententiae ſunt; vt plane

---

(*a*) Apud Senacum Tom. I. Liv. 1. Chap. II. §. 3.

ne rem esse putes, non cultro anatomico et obseruatione, sed opinionibus et ratiocininiis consequendam, de qua disputetur.

In solis generalioribus, se mutuo quamuis contradicentes, Auctores tamen substiterunt.

Et tamen nonnisi quae in vniuersum de fibris variorum stratorum obseruantur, et quae obiter intuenti apparent, notata sunt. Quid putas ergo factum esse, si minutius per singula, velut in aliis anatomiae partibus fieri solet, et vt visceris huius imprimis dignitas postulate videtur, eundum fuisset? *Senacus*, qui proprium, idque magnum et egregium opus et splendidum de corde concinnauit, externas ventriculi dextri fibras omnes similes inter se et parallelas, vno eodemque ductu progredientes, simili modo ortas et insertas, descripsit pariter et pinxit; (*a*) cum tamen variae in iis fasciae dentur, ortu, progressu, insertione et vsu diuersae, vt prope pro diuersis musculis haberi possint. Simili modo et sinistri ventriculi fibras externas tractauit, (*b*) quae tam insigniter se figura, magnitudine, ductu et distributione distinguunt. Internas vtriusque tanquam irregulares et indeterminato modo ludentes, immo tanquam confusum chaos, (*c*) pictoris tamen magis, qui singula forte non operae pretium esse duxit distinguere, quam suo, vt opinor, vitio, repraesentat; cum certo tamen ordine hae fibrae ortae progredi-

(*a*) Senac. Tom. I. Pl. 7. fig. 1. E. D. et fig. 2. D.
(*b*) Pl. 7. fig. 1. F. C. fig. 2. C.
(*c*) Pl. 11. 12. 13. 14. 15.

grediantur, certoque terminentur fine; quem ordinem Vir ſummus haud percepiſſe videtur. *Hallerus*, omnium anatomicorum fere accuratiſſimus, qui et minutias curare ſolebat, omnium breuiſſimus eſt in deſcribendo ordine fibrarum cordis. Vix quidquam praeter haec pauca verba, quae ſuperius adduxi, dixit: deſcendere fibras cordis in ſuperficie conuexa oblique a baſi ad apicem, adſcendere rurſum circa apicem flexas ad baſin in ſuperficie plana. Neque de caeterorum, Senaci, Winslowi, deſcriptionibus quidquam, quod alicuius momenti ſit, et ad rem pertineat, omiſi; vnde facile, quantum de ordine fibrarum cordis, et qua diligentia, tradiderint, intelligas. Hoc ſolum vtiliter *Hallerus* addidit iis, quae caeteri Auctores dixerant, obliquas fibras eſſe, quod transuerſali ductui multo quam longitudinali obliquitas illa ſit propior; quamuis et hoc ipſum de ſolis ventriculi dextri, minime de ſiniſtri venticuli, externis, nec de vtriusque internis fibris vere dici poſſit.

Nec id, quod imprimis neceſſe eſt, de fibris cordis notarunt.

Neque, quod magis fere miratus ſum, ad ea imprimis in deſcribendis fibris cordis animum Auctores adverterunt, quae in aliis muſculis vulgo, et merito ſane, conſiderari ſolent, ad ortum, progreſſum, ſiue directionem, et finem fibrarum, quibus ſcilicet intellectis actio muſculi et omnis vſus intelligitur; ſed alia plerumque curant, quae minus ſcitu neceſſaria ſunt. Strata alii ſtudioſe euoluunt et numerant; alii, vti Senacus, vbique et ſemper de intricato nexu loquuntur, qui inter ſingulas fibras ſibi vicinas locum habet. Winslowus alias longas, alias breues

breues fibras eſſe inculcat, aliasque retrorſum progredi et alias antrorſum, parum ſollicitus, vbi iſtae vel illae oriantur, aut vbi finiantur, nec quaenam antrorſum aut retrorſum dirigantur, indicans; id quod idem ſane eſt, ac generatim dixiſſe, dari varias fibras in corde, quae vario oriantur modo, varioque finiantur, et vario gaudeant progresſu. Alii denique ortum quidem, ſed plane alium, quam qui in myologia intelligitur, expoſuerunt; veluti Vieuſſens ab arteriis ad venas, alii a neruis, fibras muſculares deducunt, ex quo ortu et fine nulla certe harum fibrarum actio intelligi poteſt. Vix quisquam diſertis verbis alias ab aliis fibras diſtinxit, et ſingularum, quae diuerſae ſint, ortum accurate, vt muſculi alias deſcribi ſolent, et progreſſum et finem deſcripſit.

Difficultates in cognoſcendo ordine fibrarum. Difficilis praeparatio.

Sed ſummas quoque fatendum eſt, difficultates eſſe in praeparandis, in obſeruandis et concipiendis his fibris. Non facile eſt ſane membranam penitus detrahere cordis externam, ita, vt nudae fibrae et depuratae appareant, et integrae ſimul illaeſaeque ſint conſeruatae. Difficile hoc ipſis in iis ſedibus, vbi plurima adeps fibras tegit; difficilius longe in illis, vbi nulla adipe nulla celluloſa media ipſis fibris tenuiſſima membrana adhaeret. Hic, ſi vllo in alio labore, et patientia et tempore opus eſt. At huic accedit, vt magis multo in corde, quam in vllo alio muſculo, quo diutius aeri expoſitae fibrae manent, eo magis nitorem perdant, difficiliusque diſtinguantur et obſeruentur; vt fere dicas, nonniſi in ipſa praeparatione externas cordis

 fibras

fibras diſtincte obſeruari poſſe. Siccantur aere et quaſi inter ſe mutuo conglutinantur; palleſcunt aqua madefactae; ſpiritu vini contractae obſcureſcunt.

Obſeruatio difficilis.

Notiſſima deinde difficultas eſt, quam et *Hallerus* expoſuit, quod nec celluloſa, vel ſola vel adipe mixta, fibrae cordis, earumque, quos coniunctae efficerent, faſciculi, a ſe inuicem diſtinguantur, nec absque celluloſa, liberae tamen et diſtinctae altera ab altera, procedant, ſed fibrillis partim lateralibus, partim ramificationibus, eo modo inter ſe connectantur et intricentur, vt difficile ſit dictu ſaepe, quo vsque ſe vna fibra extendat, vbi altera incipiat. Dubitat quidem *Hallerus*, num vere muſculares ſint fibrillae, quas dixi laterales, an potius celluloſae, videturque huic poſteriori ſententiae propior eſſe, quam priori; ſed certum eſt, muſculoſas eſſe, cum rubedine non modo ſint tinctae, ſed manifeſto quoque variis in ſedibus ex vna fibra eiusque fibrillis continuatae in fibrae vicinae fibrillas oblique deſcendendo tranſeant, de qua re ſuo loco vberius agam. His omnibus fibrae minus diſtinctae redduntur, earumque obſeruatio difficilis.

Conceptio et Definitio difficilis, ſiue verbis exprimenda, ſiue iconibus.

Iam innumera fere copia eſt fibrarum in ſolo ſtrato externo, quae vario ſingulae ductu progrediuntur, varioque terminantur fine, quae ſi, vt vere ſe habent, primo apparerent aſpectu, vix tamen omnes notari, concipi, et definiri poſſent. Hae omnes, niſi ſeorſim ſingulae

acu

acu curatius examinantur, ſimiles eſſe videntur, et vnam potius continuam carnem referre. Quid mirum ergo, ſi a pictoribus, qui raro, et eo minus, quo in arte ſua peritiores ſunt, minutias curare ſolent, elegantium ſpirarum inſtar pictae in iconibus, praeſertim Senaci, cernuntur? Quid mirum, ſi a ſummis etiam anatomicis ipſis, aut ſola communi omnium fibrarum obliqua directione percepta, aut in nonnullis forte fibris, quae diſtinctius apparuere, obſeruata, ceterisque attributa pariter, ita fibrae deſcriptae ſunt, quaſi vno eodemque ductu omnes eodem obliquitatis gradu deſcenderent, eodemque modo insererentur?

Peculiares difficultates in externis ſinuum et venarum fibris.

Eaedem fere difficultates in fibris externis auricularum occurrunt. Vix fieri poteſt, vt in parte reticulari auriculae dextrae, quae cordi inflexa incumbit, membrana externa detrahatur. In baſi ſinuum communi, tum etiam in toto ſinu ſiniſtro difficillime fibrae diſtinguuntur. Earum imprimis in facie anteriori ſinus ſiniſtri, iuxta regionem ſepti, decurſus, ſicut origo et finis, adeo ſunt complicati, vt non immerito labyrinthum hanc ſedem Senacus vocauerit. In vena caua inferiori eiusque nexu cum ſinu dextro et ſiniſtro tam difficilis fabrica eſt, vt ſane non mirer, quod et peritiſſimi anatomici eam nunquam perſpexerint.

Minor in mediis ventriculorum.

Minor difficultas in fibris ventriculorum mediis et internis eſſe videtur. In corde, coctione indurato, facile ſtratum externum detrahitur; mediaeque detectae, vt ſunt ſimpliciori decurſu, facilius et obſeruantur et definiuntur.

Peculiaris in internis ventriculorum.

Internae vix vlla praeparatione opus habent, cum per tenuiſſimam pellucidamque membranam ſatis tranſpareant, et diuiſae in faſciculos facillime obſeruentur et diſtinguantur. At alia et peculiaris difficultas imprimis in dextri ventriculi fibris internis eſſe videtur. Frequens faſciculorum ramificatio et anaſtomoſis ordinem quodammodo turbant, adeoque occultant, vt difficilius is ordo quidem percipiatur. Augent confuſionem in mente obſeruantis et difficultatem obſeruandi parietum, dum ventriculus aperitur, et fibrarum, diſſectio, quo, interrupta continuatione, et error facile committitur, dum aliae fibrae ex aliis continuatae putantur, et ſitus earum naturalis, in parietibus reflexis inuerſus, imaginatione reſtituendus, proinde et decurſus fibrarum, difficilius concipiuntur. Hinc factum eſſe videtur, vt tanquam irregulares absque vllo ordine hae fibrae putatae ſint oriri, progredi et finiri.

Et in ſinuum internis.

Neque in ſinibus, imprimis in ſiniſtro, detractio membranae internae difficilis viſa eſt, neque obſeruatio decurſus fibrarum, quae in dextra auricula in faſciculos collectae facile diſtinguuntur, in ſinu ſiniſtro vero faſcias efficiunt, in quibus ipſae inter ſe parallelae egregie pariter apparent; ſed complicatio harum faſciarum et faſciculorum tanta eſt, vt difficillimum ſit, originem in iis, progreſſum et finem cognoſcere et definire.

Diffici-

Difficilis tandem ſtructurae cordis in mente repraeſentatio eſt.

Denique nec parvi momenti in augendis difficultatibus complicatiſſima cordis fabrica ipſa eſt; quorſum numeroſae partes non tantum difficili modo compoſitae, ſed id quoque imprimis confert, quod nihil in corde vtrinque aequale, nihil in eo ita poſitum ſit, vt ſimpliciter aut ſuperius vel inferius, aut anterius poſteriusue, aut dextrum vel ſiniſtrum, recte vocari poſſit. Omnia figura maxime irregularia, omnia ſitu obliqua, et quaſi incerta ſunt. Quae pars aut ſuperficies ſuperior eſt, ea ſimul et anterior, quae inferior, poſterior ſimul eodem iure appellari poteſt. Et ſaepiſſime in triplicem plagam partes vt ſpectent poſitae ſunt. Sic vena caua inferior ſurſum ſimul et ſiniſtrorſum et antrorſum aeque directa in ſinum ſe inſerit dextrum. Sic margo cordis acutus anterior ſimul et dexterior non modo, ſed inferior quoque merito dici poteſt. Sic apex antrorſum oblique et ſiniſtrorſum et deorſum, baſis retrorſum ſurſum et dextrorſum ſpectat. Sic ſeptum cordis facie, quae ad dextrum ventriculum pertinet, dextrorſum, antrorſum et ſurſum, quae ad ſiniſtrum, retrorſum, deorſum et ſiniſtrorſum, margine altero ſurſum retrorſum et ſiniſtrorſum, altero antrorſum deorſum et dextrorſum ſpectat. Nec deſunt partes, quae curuatae non eandem vbique, ſed diuerſam in diuerſis ſedibus, eiusmodi complicatam obliquitatem habent. Quibus ſi aliae non minus obliquo et a prioribus diuerſo ſitu poſitae partes adiungendae ſunt, vt vnam efficiant compoſitam partem cordis; tam ſaepe difficilis huius figura conceptu eſt, tantaque ſaepe diuerſarum inde rerum farrago accumulatur, vt menti cordis et ſingularum eius partium imago repraeſentari vix poſſit.

Nudatae

Nudatae cordis partes continuo obſeruandae et pingendae ſunt.

Nullo peculiari artificio vſus ſum. Partem primo aliquam haud magnam ſuperficiei externae in corde recenti ea, qua opus erat, patientia praeparaui. Quo facto continuo hanc partem, ne mora fibrae obſoleſcerent, acu ſingulis ſeorſim diſtinctis, et a principio ad finem, quo vsque detectae erant, perluſtratis, pictura in chartam conieci. Haec ſola methodus definiendi de curſum fibrarum cordis, quae ſolo verborum vſu nunquam deſcribi, nec memoriae committi poterunt. Sic vniuerſam paulatim, primo conuexam, deinde et planam, cordis ſuperficiem pertractaui. Tum demum et icone conſiderata et corde comparato cum icone, altero alterius interprete, varias origines variosque progreſſus percipere licuit, et varios fines, et ordinem, quem ſibi natura in diſponendis fibris praeſcripſiſſe videbatur.

Diſſectae partes qua ratione cohaeſerint notandum.

Simili modo etiam procedendum fuit in ſinuum fibris externis. In internis ventriculorum, praecipue dextri, accurate notandum, qua ratione partes diſſectae cohaeſerint; quo facto facile erit, etiam in reflexis parietibus, imaginatione in ſitum naturalem reſtituendis, originem fibrarum et columnarum, earumque progreſſum et ſitum obſeruare, et ordinem, qui talis eſt, vt facile, non quemcunque alium, ſed hunc vnum, idoneum et eligendum fuiſſe videas.

Partes

Partes et regiones in nudo corde notabiles.

Detractis tandem paulatim ab vniuerſa cordis et auricularum ſuperficie membrana externa et adipe, ſi quis animo adtento hoc viscus denuo conſideret, varias non poterit non percipere regiones in eo et partes nouas, quae in corde, adipe inuoluto, haud fuerant obſeruatae, et quarum, neſcio quo errore aut qua incuria, nulla apud ſcriptores ſit mentio. Imprimis circa baſin hae partes apparent, et in ſedibus, vbi magnae arteriae et ſinus cordi inſeruntur, vbi multa adeps cauitates replet, eminentias obliterat, partes abſcondit, figuras mutat, vt et tota figura quodammodo cor nudum a corde differat inuoluto. Quare, antequam ad ſtructuram muſcularem euoluendam tranſeo, operae pretium non modo, ſed plane neceſſe etiam ad fabricam illam deſcribendam, eſſe puto, vt praecipuas has partes regionesque proprias cordis nudi exponam.

Conus arterioſus (Tab. 1. I. K. L. C.)

Earum primaria pars eſt ſuprema camerae, quam merito a venoſa diſtinxerant quidam anatomici, arterioſae ventriculi dextri, quae ipſa continuo arteriam pulmonalem producit, quaeque, vt dictae camerae arterioſae, ſic totius ventriculi ſimul dextri ſummus apex eſt. Haec ad pollicem dimidium fere in latere ſiniſtro, in dextro ad integrum pollicem, a corde eiusque ſepto ſeparata eſt, proprioque pariete gaudet poſteriori, a ſepto, quod reliqui ventriculi dextri communem cum ſiniſtro parietem efficit, diſtincto; (*a*) vt ſic vna cum arteria pulmonali

(*a*) Tab. II. B. I. 10. L H. F. In aliis corporibus longiorem omnino magisque ſpecioſum reperi.

monali haec ſuprema ventriculi pars a corde, cui incumbit, eleuari et antrorſum reflecti poſſit. Non pertinet ad arteriam pulmonalem ipſam; cum fibris non modo conſtet craſſis carneis, duplici ſtrato, externo internoque, ordinatis, quas nullas in arteria pulmonali reperi, ſed infra baſes quoque valuularum ſemilunarium, quae certe arteriam a ventriculo diſtinguunt, poſita ſit. Peculiaris ergo, eaque ſumma ventriculi dextri pars eſt, ſeu additamentum, quo ſuper ſeptum, quod binos ventriculos diſtinguit, prominet, et ipſum proinde ventriculum ſiniſtrum quoque ſuperat. Septum cordis extremitate ſua poſteriore ſeu ſuperiore, qua ad orificium vsque arteriae pulmonalis pertingere creditum fuit, ad ipſam baſin vsque partis huius acceſſoriae ventriculi dextri, adſcendit; orificium arteriae non attingit; et toto hoc additamento ſuo ventriculus dexter ergo ſuper extremitatem ſepti prominet. Eaque extremitas ſepti ipſa, dum pars acceſſoria ventriculi cum arteria pulmonali antrorſum reflectitur, citra vllam ventriculi ſectionem in ſuperficie eius externa in conſpectum venit, (*a*) peculiari fabrica donata, inferius deſcribenda.

Eius figura et ſitus. (*Tab.* 1. *I. K. L. C.*)

Coni fere, oblique truncati, et compreſſi, haec pars, quam dico, figuram habet, vt planae ſint eius ſuperficies anterior et poſterior, latera, dextrum et ſiniſtrum, tanto conuexiora. Illud quidem pollicem aut plus eo aequat, ſi quo vsque proprio pariete poſteriore pars arterioſa ventriculi gaudet, a ſepto diuerſo, et reflecti antrorſum poteſt, ad conum refertur; latus ſiniſtrum pollicis

(*a*) Tab. II. 7. 8. Haec tabula, cum ob anguſtiam temporis perfici non potuerit, ſecundae diſſertationi in Tomo Act. ſequente addetur.

cis fere dimidii altitudinem habere solet. Hinc, si cor eo situ gaudet, fere transuerso, vt arteria pulmonalis recta retrorsum in corpore adscendat; basis, qua parti arteriosae ventriculi *conus* respondet, humilior dexterius, sinisterius altior, lumen contra supremum, cui arteria insidet pulmonalis, horizontale est. Si minor cordis in corpore obliquitas est, vt arteria pulmonalis oblique sinistrorsum adscendat, tum basis cum plano conuenit horizontali, orificium superius parem cum arteria pulmonali obliquitatem habet. Quicunque vero sit situs cordis, axis *coni arteriosi* idem simul arteriae pulmonalis axis est, et conus cum arteria inde continuata eandem directionem habet.

Structura (Tab. I. x. y. 1. 2 4. 5. 6.)

Fibrae, quibus conus arteriosus efficitur transuersae sunt ad axin coni et maximam partem semicirculares; vt constrictorum officio fungi possint. Oriuntur ex partibus septi, quas retro conum esse dixi, et a latere sinistro superficiei posterioris coni ipsius (*a*). Hae praecipuam partem superficiei posteriores coni obducunt, flexaeque circa latus dextrum in superficiem anteriorem perueniunt, (*b*) cuius partem superiorem dexterioremque occupant. Inseruntur anterius in basin arteriae pulmonalis. Tum alia latior fibrarum fascia, retro conum a basi aortae ortarum, (*c*) infra priores latus dextrum coni circumdat (*d*) in dimidiam eius superficiem anteriorem inserta. In latere sinistro fascia fibrarum ab anteriori sinisteriorique parte basis

 arte-

(*a*) Tab. II. 9. 9.
(*b*) Tab. I. 4.
(*c*) Tab. II. 12. 13. 14. 15. 16.
(*d*) Tab. I. 5. 6.

arteriae pulmonalis oritur, (*a*) quae inde oblique finiſtrorſum deſcendit, et flexa circa latus coni ſiniſtrum in marginem ſuperiorem ſepti inſeritur. Haec parua eſt in hoc corde cuius iconem exhibui; in alio multo latior erat, maiorem cono altitudinem formamque magis ſpecioſam largiendo. Denique fibrae quaedam (*b*), quae ad faſciam peculiarem pertinent, inferius deſcribendam, infimam partem coni in latere ſiniſtro ad ſuperficiem cordis alligant, quibus ſolutis conus maior apparet et ad partem maiorem reflecti poteſt. Haec faſcia (*c*), ex fibris externis ventriculi dextri orta, ſuper faciem anteriorem coni et porro in latere eius ſiniſtro ſuper arteriam coronariam ſiniſtram pontis inſtar tranſit, fibrisque ventriculi ſiniſtri externis ſe immiſcet. Sic conum in latere ſiniſtro ad cordis ſuperficiem alligat.

Camera arterioſa ventriculi dextri (*Tab. I. G. H. I. C.*)

Ipſa pars, ſeu camera, arterioſa ventriculi dextri diſtinctius in corde nudo, quam in inuoluto, quoad figuram et limites apparet. Extendit ſe a cono arterioſo dextrorſum fere ad angulum cordis dextrum vsque, ſiniſterius plus quam dimidiam partem marginis ſepti ſuperioris latere ſuo ſiniſtro, ſuperficie dimidiam fere partem poſteriorem ſiniſterioremque ſuperficiei ſuperioris ventriculi dextri occupat.

Eius figura et ſitus.

Figura eius ſemiconica eſt, cuius faciem anteriorem conuexam dicta ſuperficiei ventriculi pars, poſteriorem planam

(*a*) Tab. I. x.
(*b*) Tab. I. z. 3.
(*c*) Tab. I. z. 3. 9. 10.

planam ſeptum cordis cum valuula orificii venoſi anteriori efficit. Baſi latiore camerae ventriculi venoſae, apice truncato baſi coni arterioſi, reſpondet.

Infundibulum ventriculi dextri. (*Tab. I.* G. H. I. C. P.)

Sic vna cum hoc poſteriori vnum continuum conum maiorem, vel potius *infundibulum* efficit, cuius apertura magna a largiore camera venoſa incipiat, orificium anguſtum arteriae pulmonali, tanquam tubo infundibuli, ſit adaptata.

Eius fibrae (*Tab. I.* 13. 14. 15. 16. 17. 17. 17.)

Non deſcribo hic fibras infundibuli huius, de quibus amplius in diſſertatione tertia agetur. Hoc ſolum praemoneo, fibras, quae cameram tegunt arterioſam, parallelas eſſe fibris coni arterioſi, et transuerſales ad communem axin totius *infundibuli*, ſiue camerae arterioſae, coni arterioſi, et arteriae pulmonalis; caeteras contra fibras omnes ventriculi, quae nunc ad cameram venoſam pertinent, declinare variis modis ab ea directione, vt nec parallelae ſint his fibris prioribus, nec transuerſales ad axin infundibuli. Ex quibus certe, et peculiari fine hoc infundibulum conſtructum eſſe apparet, et quaenam eius ſit actio et vſus, manifeſtum eſt.

Infundibuli vſus.

Quum enim ventriculus dexter, fibris muſcularibus debilior, maiori tamen ſanguinis quantitati, quam capit, promouendae deſtinatus eſſet; alio adminiculo opus fuit, quo, quod virium defectu ſanguinis celeritati et im-

 petui

petui decederet, compenſaretur. Id ipſum infundibuliformi figura harum partium, camerae arterioſae, coni et arteriae pulmonalis, amuſſim efficitur. Hac enim, prout ſanguis in anguſtiora continuo loca propellitur, celeritas eius et impetus continuo quoque augentur. Verum quidem eſt, eundem obtineri effectum, dummodo ex ampliori ventriculo in anguſtiorem arteriam ſanguis mouetur, ſiue infundibuliformis ſit pars eius propior arteriae, ſiue oualis aut ſubrotunda, qualis eſt ventriculo ſiniſtro, vbi ex ampliſſima eius parte, quae eſt ad baſin prope aortam, ſanguis continuo in anguſtiorem arteriam cogitur. At facile patet, ad eiusmodi ſimultaneum celeritatis augmentum vires non modo maiores muſculares, ſed firmitatem etiam parietum, ſanguinem comprimentium, maiorem requiri; minorem contra vim inferri parietibus a ſanguine reſiſtente, minoribusque opus eſſe viribus ad prepellendum ſanguinem, ſi ſucceſſiue is ſanguis in vaſe infundibuliformi ad loca paulatim anguſtiora propulſus, paulatim celeritate et impetu augetur. Iam triplo dicuntur, mihi quintuplo aut ſextuplo in plurimis ſedibus videntur, et tenuiores parietes eſſe dextri quam ſiniſtri ventriculi, et debiliores vires fibrarum muſcularium. Non videntur ergo aut parietes ferre poſſe reſiſtentiam ſanguinis promovendi, aut vires ad eum motum ſufficere ventriculi dextri, ſi augmentum celeritatis momentaneum motu ſanguinis ex vaſe ampliſſimo in continuo anguſtum obtinendum fuiſſet. Infundibuli ergo forma opus fuit parti ventriculi, arteriae praecedenti, qua viribus minoribus, parietumque firmitate minori, idem effectus tamen obtineri poterat.

Et natura.

Fibrae transuerſales infundibulum conſtringendo recta ſanguinem ad axin huius vaſis in arteriam pulmonalem propellunt, nec vlla alia in parte ventriculi aut fibrae ad hunc modum accurate diſpoſitae inueniuntur, aut ſanguis ad eam directionem mouetur. Quo etiam minutius haec pars infundibuliformis, inter ſeptum et parietem anteriorem ventriculi contenta, conſideratur, eo aptior ad vſum illum explicatum reperitur. Vt enim ſepti ſuperficies in ventriculo dextro decliuis ab orificio arteriae pulmonalis ad marginem ventriculi deſcendit; patet dimenſionem a pariete anteriori ad poſteriorem eo eſſe continuo minorem, quo propius ad arteriam accedas, eoque ad marginem vsque maiorem, quo magis ab arteria pars cauitatis ſit remota. Latitudinis ergo non modo, ſed profunditatis etiam, reſpectu pars infundibuliformis a camera venoſa ad arteriam pulmonalem vsque continuo decreſcit. Sed vt penitius tum partis huius, tum imprimis fibrarum, quae ad eam pertinent, actio et vſus intelligantur, aliae porro regiones et partes notabiles, quae ſe in corde nudo manifeſtant, ſunt deſcribendae.

Angulus cordis. (Tab. I. G. 24 25.)

Ad eas angulus pertinet ventriculi dextri, idemque ſimul cordis ipſius angulus, qui inter baſin ventriculi dextri et marginem anteriorem acutum continetur. In corde, membrana et adipe tecto, vix angulus in hac ſede diſtinguitur; quin rotundato fine margo anterior ad baſin et ad radicem ſinus dextri finitur. Ablata vero adipe, quae baſin cordis coronae inſtar craſſae tegit; notabili parte, et ad pollicem fere vsque, angulus carneus in baſi a radice

radice ſinus prominet, et ab ipſo margine anteriori aliquo modo diſtinctus obſeruatur, vt magnae papillae inſtar in hac ſede promineat. In ſolis ſuperficiebus cordis, in ſuperiori et inferiori, angulus diſtinctus non eſt. ſed continuis cum ventriculo ſuperficiebus gaudet.

Structura anguli interna

Haud tamen ob ſolam hanc prominentiam angulus ventriculi dextri notabilis eſt. Singularem partem camerae venoſae et proprium receptaculum ſeu folliculum efficit, ſimilem fere auriculae mobilis ſinus dextri, quo ſanguis, per orificium venoſum impulſus, diſperſus inter filamenta valuulae, recipi, contineri, et commode ſyſtoles tempore exprimi poſſit. Simili enim modo vt auricula columnis intus, varie ramificatis, inter ſe conuexis, diſtantibusque a parietibus, repletus eſt. Quae inde porro verſus apicem, excepto apice ipſo, ſequitur media et maior camerae venoſae pars, ſicut arterioſa infundibuliformis, caua intus et vacua eſt columnis, a parietibus ſeparatis. Fibris quidem hae partes, iisque ſatis craſſis, ſed latis, planis, et ſuperficiei ventriculi internae adnatis, inſtructae ſunt. Sic ſtructura a maxima parte camerae venoſae et ab arterioſa angulus cordis differt, ſolumque apicem ventriculi, ad alteram huius extremitatem poſitum, ſibi parem habet.

Anguli vſus.

Vſus eſt ſanguinem vltimum, a ſinu dextro expreſſum, recipere. Primus enim procul dubio in largiorem mediam camerae venoſae partem, inter ſeptum et marginem contentam, cauam et vacuam, dehinc vero porro

porro in apicem et in cameram arterioſam infundibuliformem proiicitur. Qui vero tum porro, his partibus repletis, accedit, is demum per filamenta valuulae venoſae in ſinus anguli et partium vicinarum, inter annulum valvularum et parietes penetrare, angulumque imprimis extendere et replere videtur.

Simile auricularum ſanguinis receptaculum eſt.

Pariter cum angulo atque cum auriculis mihi comparatum eſſe videtur, vt imprimis in plethora, et quando maiori copia ſanguis circa cor colligitur, penitus repleantur; vt in iis hominibus, qui nimia ſanguinis copia continuo laborant, maiores inueniantur, quam in iis, qui ſanguine ſolent carere; vt demum a ſanguine nimium vrgente magis magisque extendantur; imo vt iisdem his cauſis ſint ortae.

Columnarum anguli vſus.

Columnae, quibus angulus occupatus eſt, validiori eius contractioni primum inſeruiunt; quo ſanguis, inter ramos columnarum haerens, latensque in variis ab illis formatis ſpeluncis, exprimi poſſit. Deinde, vt eo vsque receptaculum conſtringi non poteſt, vt parietes ſe mutuo tangant; aliquam cauitatis partem occupant, quo facto parietes conſtricti, ad columnas compreſſas ſe arcte applicando, ſanguinem facile omnem excutiunt.

Regio ſ. pars baſilaris ventriculi dextri. (Tab. I. O. Tab. II. F. H. K. M.)

Solet in corde, adipe inuoluto, in ſuperficie ſuperiori ad baſin ventriculi dextri, margo notari, quem baſi-

larem vocare posses, mero fere adipe factus, crispus, ad sinus dextri radicem applicatus, auricula flexa tectus. Alia rei facies apparet, dum adipe detracto cor nudum carneum in hac sede consideratur. Est pulchra, pollicem fere cum dimidio lata superficies, quam adipe ablato auricula nunc non tangit, vt basin cordis in situ suo oportet, retrorsum spectans, proinde basilaris, quam latus ventriculus ad basin est, longa, ab arterioso cono ad angulum vsque cordis extensa, latissima prope conum, inde ad angulum sensim angustior, sic fere figura triangularis. Haec tantum abest, vt eadem continuata ventriculi convexa superior sit superficies, vt concaua potius existat, margineque (*a*), haud quidem eodem, at simili ei, qui in tunicato corde apparet, a superiori conuexa superficie distinguatur.

Limites.

Incipit latissima sinisterius a superficie posteriori coni arteriosi, et continuat quidem parte sui anteriore (*b*) ex ea superficie; posteriore (*c*) a latere dextro basis aortae originem ducit. Inde sensim angustior ad angulum cordis progreditur, vbi obtuso fine (*d*) definit. Anterius margine secundum suam longitudinem terminatur, eodemque a superficie superiori obliqua et anteriori cordis distinguitur. Is margo, pariter ac superficies basilaris ex superficie posteriori, e latere dextro coni arteriosi continuat,

---

(*a*) Tab. I. I. K. G.
(*b*) Tab. II. L. F.
(*c*) Tab. II. L. H.
(*d*) Tab. II. M.

nuat, (*a*) pariterque ad angulum cordis vsque progreditur, vbi flexus ad ſuperficiem inferiorem euaneſcit. Poſterius, ſiue inferius, radice ſinus dextri (*b*) ſuperficies baſilaris terminatur, qui tamen terminus poſterior minime ad extremitatem vsque ſuperficiei continuat, ſed plus quam dimidium pollicem ab angulo cordis, dum collo quaſi in hac ſede ſinus baſi cordis innaſcitur, ceſſat.

Extendit ſe ad ſuperficiem cordis inferiorem vsque.
(Tab. III. E.)

Hac parte, extremitate dextra, qua poſterius, ſiue inferius, nullo termino limitatur ſuperficies baſilaris, praeter ſinum dextrum vsque ad marginem poſteriorem dexterioremque, ſiue baſilarem ſuperficiei inferioris planae ventriculi dextri tranſit, eoque in hac ſede terminatur, et a ſuperficie inferiori cordis diſtinguitur. Imo flexa circa ſinum ad ſuperficiem inferiorem cordis ſemipollicis fere ſpatio adhucdum porro ſuperficies baſilaris continuat, atque tum demum, dum ipſi margini ſuperficiei inferioris cordis ſinus in hac ſede adhaeret, acuto fine definit et quaſi euaneſcit.

Breuis huius regionis definitio.

Sic ergo accuratius dicendo, non modo quae ad faciem ſuperiorem conuexam ventriculi dextri eſt, eam baſilaris ſuperficies occupat partem baſis cordis; ſed occupat porro eam, quae angulo et margini acuto anteriori ventriculi reſpondet, et extendit ſe denique aliqua exi-

(*a*) Tab. I. I. K. G.
(*b*) Tab. II. 31. 31. 33.

gua portione ad ſuperficiem inferiorem cordis. Quae eius pars angulo cordis reſpondet, ea ipſa eſt, qua in ſuperioribus dixi hunc angulum a baſi ſinus prominere.

Eadem qua ratione concaua ſit.

Ea pars maxima et praecipua ſuperficiei baſilaris, quae ad ſuperiorem ventriculi ſuperficiem eſt, notabili, vti iam monitum, concauitate gaudet. Haec hac ratione efficitur. Vbi poſterius conus arterioſus ſua baſi cum baſi aortae contingit, angulus (*a*) in latere dextro acutus inter binas baſes formatur. Ex eo linea recta dextrorſum ad angulum cordis vsque in baſilari ſuperficie excurrit, (*b*) eamque in duas partes, fere aequales, ſecundum longitudinem diuidit, anteriorem ſeu ſuperiorem (*c*), quae ea eſt, quam in praecedentibus ex ſuperficie poſteriori coni arterioſi continuare monui, et poſteriorem, ſeu inferiorem (*d*), quam dixi oriri a latere dextro baſis aortae. (*e*) Ad hanc lineam ergo ſuperficies baſilaris inflexa eſt, vt binae ſuperficiei partes oblique ſe mutuo reſpiciant, ſuperior retrorſum et deorſum ſpectando, inferior retrorſum et ſurſum.

Eſt vera baſis libera cordis.

Haec nunc, quam vtilius regionem forte dixerim, aut partem, baſilarem ventriculi dextri, ſuperficies vera pars

---

(*a*) Tab. II. L.
(*b*) Tab. II, L. K.
(*c*) Tab II. L. F. K.
(*d*) Tab. II. L. H. K. M.
(*e*) Linea haec ipſa in icone, vbi ſuperficies baſilaris, deorſum hanc partem flectendo, extenſa eſt, non apparet. Dum vero pars baſilaris in ſitu ſuo naturali eſt, crena quaedam, aut foſſula quaſi ad hunc ductum (L. K.) formatur, qua tota ſuperficies baſilaris concaua efficitur.

pars eſt baſis cordis, et ſola, ſi paruam ſepti particulam excipias, quae libera ſit, nec occupata ſinibus aut vaſis. Superficies enim ventriculi dextri inferior exigua crena tantum a poſteriori ſuperficie ſinus dextri diſtinguitur, (*a*) vt modo non continua ſit in hac ſede cordis cum ſinus ſuperficie; adeo totam baſin ad faciem inferiorem cordis ſinus dexter occupat. Ventriculus ſiniſter in ſuperficie cordis ſuperiori aeque ac inferiori et in latere ſiniſtro profundiori crena quidem a ſinu ſiniſtro diſtinctus eſt, margineque baſilari craſſiore (*b*) circumquaque prae ſinu eminet, ſed ne vmbra quidem ſuperficiei a margine iſto obtuſo in ſedibus illis formatur; nec alia de cauſa, niſi ob ſolam carnium craſſitiem, margo prae ſinu eminet. In ſuperficie ſuperiori dexterius prope ſeptum (*c*) vbi quaedam fibrae craſſiores a latere ſiniſtro baſis aortae, quae ante ſinum poſita eſt, oriuntur, hac parte ventriculus prae ſinu eminet quidem; at nullo modo haec pars a ſuperficie cordis ſuperiori conuexa diſtingui poteſt, ad quam pertinet, et nulla ergo, neque in hac ſede, peculiaris pro baſi ſuperficies formatur.

Arteriae et ſinus non totam baſin cordis occupant.

Sic baſin ſinuum communem et arteriarum minorem eſſe vides baſi cordis, cui implantantur, nec implantari haec vaſa in ipſam mediam baſis partem, ſed ita vt in-

(*a*) Tab. III.
(*b*) Tab. I. w. 59.
(*c*) Tab. II. 7. In aliis cordibus plures tamen, huic ſimiles, craſſas breuesque columnas carneas, a baſi aortae natas, eſſe vidi, quibus ergo conuexitas marginis baſilaris et prominentia ſuperficiei ventriculi prae ſinu augetur.

inferius et finiſterius baſis tota ad marginem vsque occupetur, dexterius et anterius minor quidem, at aliqua tamen, etiam notabilis, pars vacua ſuperſit.

Inſertio ſinuum et arteriarum in baſin cordis accuratius deſcripta.

Nimirum baſis ſinuum communis, quae vna fere continua faſcia carnea cingitur, (*a*) figuram ſatis ſimplicem, transuerſim oblongam, habet, vt anterius poſteriusque ſuperficie plana pars ſinuum inferior communis, baſis ipſa linea recta. vtrinque lateribus conuexis et baſis et tota pars inferior communis, circumſcribatur. Hac ſua transuerſim oblonga baſi communi ſinus parti inferiori ſiniſteriorique, figura ſibi conformi, baſis cordis inſeruntur; vt limites baſis vtriusque in ſedibus iis, inferiori ſiniſteriorique, conueniant, anterius et dexterius baſis promineat cordis. Iam fere in media parte, paulo ſiniſterius, baſi, pariter transuerſim ouali, lumineque compreſſo, aorta (*b*) ante ſinuum baſin, et arteria pulmonalis (*c*) ſimili transverſim oblonga baſi ante aortam, paulo dexterius tamen, collocatae exiſtunt. Quantum ergo ſuo lumine aorta, tantum ſiniſterius ventriculus ſiniſter conuexitate ſuperficiei ſuperioris, quantum et aorta et arteria ſimul pulmonalis luminibus ſuis, tantum dexterius ventriculus dexter parte ſua baſilari ante ſinus prominet, tantumque in hac dexteriori

(*a*) Tab. II. 5. 44. 46. 47. 48. Tab. III.
(*b*) Tab. II. q.
(*c*) Tab. II. G. Haec pulmonalis arteriae baſis cum cono arterioſo antrorſum reflexa in hac icone eſt; in ſitum ergo naturalem erecta altior baſi aortae.

riori parte bafis in corde vacuae datur. Superficies nempe bafilaris parte fua inferiori, a bafi aortae nata, aortae latitudinem, fuperiori, a coni arteriofi facie pofteriori continuata, craffitiem arteriae pulmonalis occupat.

Ventriculus dexter prope bafin prae finiftro eminet.

Ventriculi ergo non modo prae finibus, fed dexter quoque ventriculus prae finiftro, in fuperficie fuperiori cordis prope bafin paululum, quantum nempe diameter efficit minor compreffae arteriae pulmonalis, aut coni arteriofi, eminet. In parte fuprema iuxta conum ventriculus finifter dextro humilior facile obferuatur. (*a*) Inferius autem fascia fibrarum (*b*) e dextro in finiftrum ventriculum pontis inftar tranfit, crenamque, binos ventriculos diftinguentem, (*c*) et arteriam coronariam finiftram, decurrentem in ea crena, tegit adeo, vt vna continua vtriusque ventriculi fuperficies in hac fede iam effe videatur.

Etiam fepti aliqua pars in bafi cordis libera apparet. Tab. II. 7. 8.

In eadem regione, ante mediam finuum bafin communem et ante aortam, pone conum arteriofum, paulo finifterius tamen, quae fedes in bafi cordis regioni fepti refpondet, foffa inuenitur (*d*) breuis, at larga, fatisque profunda, figura fere triangularis. Haec bafi

(*a*) Tab. I. C. L.

(*b*) Tab. I. 2. 3. 9. 10.

(*c*) Tab. I. L.

(*d*) Tab. II. 8.

bafi retrorfum ad bafin aortae, crure altero dextro ad conum arteriofum, finiftro ad columnam refpicit carneam, quam continuo dicam; iisdemque partibus includitur atque formatur. Iuxta foffam finifterius columna, quam dixi, pofita eft carnea (*a*). Haec, fimilis fere figurae, bafi pariter retrorfum, vel deorfum, ad bafin aortae, latere dextro ad foffam, finiftro ad ventriculum fpectat finiftrum, apice, cum apice foffae coniuncto, ad extremitatem pofteriorem marginis fuperioris fepti adfcendit. Hae ambae partes ad bafin cordis, et quidem in fpecie ad fepti bafin, pertinent. Vt retro conum enim et arteriam pulmonalem, retroque fupremam partem ventriculi dextri, ergo in bafi cordis, quam efficiunt, fitae funt, ad bafin hanc pertinent; et pertinent quidem ad bafin fepti, cum inter vtrumque ventriculum, quae fedes fepto refpondet, collocatae exiftant. Sic de bafi ventriculi dextri non modo, fed etiam de fepti bafi, aliqua portio in communi bafi cordis libera eft.

Pars bafilaris ad perficiendum infundibulum concurrit.

Haec ergo eft finuum et arteriarum in bafin cordis infertio et conditio partis bafilaris ventriculi dextri. Huius nunc partis bafilaris maxima portio, quae ad fuperficiem fuperiorem cordis fita eft, ea parte excepta, qua angulum efficit, ad cameram pertinet arteriofam ventriculi dextri, eiusque figuram infundibuliformem plurimum perficit, conuexitatemque et ambitum circularem in diaftole cordis auget. Monenda funt autem quaedam, antequam haec penitius explicari poffint.

De

(*a*) Tab. II. 7.

De ſtatu cordis in homine viuo triplici.

Haud recte duplex cordis ſtatus, ſyſtole et diaſtole, cenſeri, ſed triplex omnino, altero ab altero diſtincto, eſſe videtur. Quam formam cordis poſt mortem obſervamus, ea nec ſyſtoles certe, neque diaſtoles, ſed ſtatus inter eos medii, ſtatus quietis, effectus eſſe poteſt. Collapſi enim et plani et molles ventriculi ſunt, quos in diaſtole inflatos, contractos in ſyſtole eſſe oportet. Et maxime pars baſilaris ipſa ventriculi dextri, hanc figuram cordis, quam poſt mortem reperimus, neque in ſyſtole neque in diaſtole locum habere poſſe, demonſtrat. Margo enim, ex latere dextro coni arterioſi ad angulum cordis continuatus, quo ipſo baſilaris ſuperficies a ſuperficie ſuperiori cordis diſtinguitur, magna largi parietis ſuperioris ventriculi, qui ab apice ad baſin longitudine multo ſeptum et parietem inferiorem ſuperat, plica eſt. Haec plica in diaſtole manere non poteſt, cum ventriculo et pariete hoc ſuperiori extenſo neceſſe ſit, vt pars plicata cedat, et plica euaneſcat. Neque poteſt in ſyſtole conſtare, cum niſi extenſis prius parietibus ventriculus ſe contrahere et ſanguinem comprimere non poſſit. Cor ergo plicatum, ventriculis collapſis, ſubmollibus, quale poſt mortem reperitur, in ſtatu eſt diuerſo a ſyſtoles et diaſtoles ſtatu. Et videtur ille ſtatus quietis et ſpontaneus eſſe, in quem cor redit, quando nec agit, nec patitur. Sed et in viuo homine hic ſtatus obtinere et naturalis cordi et habitualis eſſe videtur. Conſtantiſſima enim haec forma cordis eſt, quam in omnibus corporibus obſeruamus; neque poſſet tam conſtans eſſe, niſi naturalis et habitualis cordi eſſet. Neque vero etiam habitualis cordi eſſe poſſet, niſi et in viuo contingeret homine. Veriſimillimum

 ergo

ergo eſt, poſt ſyſtolen abſolutam, ſanguineque expulſo, cor continuo redire in hunc ſuum ſtatum ſpontaneum, vbi aliquo temporis momentulo quiescit, antequam nouus ſanguis ingrediatur. Nec primus ilico ſanguis, qui in ventriculum ingreditur, hunc ſtatum mutat. Recipit multum caua camera venoſa et apex et angulus ventriculi, antequam neceſſe ſit, vt parietes extendantur. Repletis vero his diuerticulis ſpontaneis, et copia ſanguinis tamen continuo aucta, tum demum extenſis parietibus figura et ſtatus cordis mutantur.

Tres iſti diuerſi ſtatus definiuntur.

Sic triplex ergo omnino, etiam in homine viuo, cordis ſtatus, et propria pro quouis ſtatu, figura cordis datur. Primus eſt ille, quem deſcripſi, ſtatus ſpontaneus, quo naturali ventriculi et perpetua ſua, qua etiam poſt mortem gaudent, elaſticitate et rigiditate, quilibet pro fabrica ſua, contracti exiſtunt; quo notabilem adhucdum cauitatem, quae haud mediocrem portionem ſanguinis capere poſſit, continent, et quo imprimis ventriculus dexter in magnam ſuam plicam baſilarem contractus eſt. Secundus diaſtole eſt, qua viribus alienis ventriculi primo explicantur, dein et praeter naturalem ſuam dimenſionem, quantum aut elaſticitas permittit, aut vires alienae applicatae efficiunt, extenduntur; vbi cauitates ergo multo, quam pro fabrica et naturali ſubſtantiae firmitate ſunt, ampliores fiunt. Tertius denique ſyſtole eſt, qua ſollicitati ventriculi inſita fibris irritabilitate praeter naturalem ſuum modum et eo vsque ſe contrahunt, vt omnem, ſi corpus ſanum eſt, ſanguinem expellant, proinde nullam admittant cauitatem. Hac cordis actione finita (actio

ctio enim syſtole eſt, diaſtole paſſio,) ſtimulante cauſa ceſſante, eadem hac, cuius mentionem feci, naturali fibrarum rigiditate et elaſticitate, qua et compreſſioni, aeque ac extenſioni, reſiſtunt, ventriculi in ſuum, quem dixi, ſpontaneum ſtatum redeunt, in eamque, quam pro hac ſua rigiditate et pro fabrica habent, figuram ſe recipiunt.

Et demonſtrantur.

Neque poſſet etiam ex ipſa ſyſtole continuo diaſtole fieri; cum contracti ventriculi nullum ſanginem admitterent, et vi auricularum vinci non poſſent. Remiſſio ergo actionis neceſſe eſt, vt intercedat ſyſtolae praecedenti et ſequenti diaſtolae. Dum actio vero ceſſat, non eandem ſane ventriculi figuram retinebunt, quam nonniſi ſola ea actione erant nacti; in eam ergo neceſſe eſt vt ſe recipiant figuram quamcunque, antequam nouo ſanguine implentur, quam habeant, dum nec agunt neque patiuntur; quae certe nulla alia eſſe poteſt, quam eadem, quam poſt mortem obſeruamus. Similique modo cum omnibus caeteris muſculis comparatum eſt, qui aliam figuram habent, dum irritati, aut anima commoti, ſe contrahunt, aliam, dum ſibi remittuntur, aliam, dum vi extenduntur externa. Et facile rem omnem concipies, dummodo conſideraueris, tam ſyſtolen, quam diaſtolen, figuram mutare cordis. Quod ſi verum eſt, figuram ſane eſſe oportet, quae mutetur, diuerſam ab vtraque mutata figura; quae igitur illa eſt, quam in mortuo corde obſeruamus.

Pars baſilaris inter caeteras cordis partes maxime in diaſtole mutatur.

Triplex ergo figura cordis datur pro triplici, quem

quem successiue experitur, statu. Quam hactenus, aut cuius partes, descripsi, haec sola figura est, qua cor in statu suo spontaneo gaudet, quae alio modo in diastole, et alio rursum in systole mutatur. Inter omnes partes cordis partem basilarem ventriculi dextri eam esse arbitror, cuius figura maxime, imprimis sub diastoles statu, mutabilis sit. Tota haec pars fere confunditur cum infundibulo, et confluit superficies basilaris cum superficie superiori conuexa ventriculi. Ea enim partis basilaris portio, quae inter marginem, quo haec a superficie ventriculi distinguitur, et eam lineam, qua superficiem basilarem inflexam esse dixi, continetur, quae eius portio scilicet superior est, (*a*) primum irrumpente sanguine inflatur. Eleuatur porro et paries ventriculi superior, et ea in specie pars, quae propinqua margini basilari ad infundibulum pertinet. Sic margo, quem simplicem plicam esse monui largioris parietis superioris ventriculi, quo superficies basilaris a conuexa ventriculi superficie distinguitur, pariete isto extenso, euanescit, et superficiei basilaris portio superior, inter marginem et lineam inflexam contenta, cum superiori superficie ventriculi in vnam continuam conuexam superficiem confluit.

Ea mutatio porro descripta.

Nimirum inflaretur tota pars basilaris ad radicem vsque sinus dextri, nisi crassa columna muscularis, fortissima omnium ventriculi dextri, quam in sequentibus, vbi de fibris ventriculi internis agendum, dicam, ad lineam inflexam intus ducta, totam hanc sedem partis basilaris retineret, quo minus extendi

(*a*) Tab. II. L. F. K.

extendi et inflari poſſit. Sic portio inferior ergo, inter lineam inflexam et radicem ſinus dextri contenta, (*a*) ſitum ſuum et poſitionem conſtanter ſervat; ſolaque portio ſuperior, a linea inflexa ad marginem baſilarem, idque parum tantum inflatur. Tanto magis vero, quae citra marginem eſt, pars proxima ſuperficiei conuexae ventriculi, et eo vsque, extenditur, vt vnum cum portione ſuperiori partis baſilaris continuum arcum efficiat.

Quomodo infundibulum inde perficiatur.

Vti nunc haec portio baſilaris ſuperior ita poſita eſt, vt retrorſum oblique et deorſum ſua facie externa reſpiciat, arcus, qui ab illa et a ſuperiori ſuperficie ventriculi formatur, proinde infundibulum ipſum, quod ſuperficies ſuperior efficit, et cui nunc portio illa accedit, eam inde figuram nanciſcitur, vt plus quam dimidium referat conum, ad axin diſſectum, et fere integrum, cui ſuperficiale tantum ſegmentum deficiat. Itaque baſin et ſectiones ſaltem ſemicirculares infundibulum in ſtatu diaſtoles habet; et regio baſilaris eatenus quidem ſubſiſtit in hoc cordis ſtatu, vt verſus vaſa maiora, ſiue retrorſum, haec pars parietis reſpiciat; at nullo peculiari margine baſilari a ſuperficie, nunc admodum conuexa, ſuperiori ventriculi diſtinguitur. Diaſtole autem et ſequenti ſyſtole finita in conſuetam ſuam plicam paries largus ventriculi ſe rurſum componit, eaque denuo regionem baſilarem a ſuperficie conuexa ventriculi diſtinguit.

(*a*) Tab. II. L. H. K. M.

Partis venesae ventriculi dextri figura et situs. (*Tab. I. G. H. M. A. N. D.*)

Monitum eſt in ſuperioribus, infundibulum, ſeu partem ventriculi arterioſam infundibuliformem cum arteria pulmonali, parti venoſae baſi ſua (*a*) reſpondere. Haec tanquam latum fundamentum conſiderari poteſt, ſuper quod infundibulum ſit ad pendulum erectum. Margo cordis anterior huius ſimul fundamenti, ſeu partis venoſae, margo anterior eſt, quo haec antrorſum terminatur. Dexterius angulum (*b*) et orificium venoſum ventriculi habet, ſiniſterius ventriculi apicem. (*c*) Inferius et poſterius toto pariete inferiori ventriculi plano, quo tanquam propria baſi diaphragmati incumbit, haec pars venoſa terminatur. Latiſſima igitur ventriculi pars venoſa eſt, eademque ipſa in ſua baſi, qua diaphragmati incumbit, quam in parte ſuperiori, qua in arterioſam ventriculi partem continuat, latior. Et ex latiſſimo ambitu ergo ſanguis, vndiquaque compulſus, in continuo anguſtiora loca, donec in arteriam pulmonalem ipſam intrauerit, cogitur.

Eius tres, quibus conſtat, partes.

Tres partes imprimis in hac parte ventriculi venoſa diſtingui et notari merentur: Angulus ventriculi, (*d*) ſeu pars angularis, quae tota ad venoſam partem pertinet, quae dexterius orificium venoſum circumdat; et extremi-

(*a*) Tab. I. G. H.
(*b*) Tab. I. G. M.
(*c*) Tab. I. N. D. H.
(*d*) Tab. I. G. M.

tremitatem dextram quaſi partis venoſae efficit; tum apex ventriculi, (*a*) qui pariter ad partem venoſam pertinet totus, et extremitatem efficit eius ſiniſtram; denique pars media inflata, (*b*) margini cordis anteriori, eiusque mediae parti reſpondens, ampliſſima, latitudine fere baſi partis arterioſae, in quam venoſa continuat, aequalis; vt ipſis illis extremitatibus ſuis, dextra, parte angulari, et ſiniſtra, apice ventriculi, venoſa pars prae arterioſa vtrinque promineat, et totis his extremitatibus ergo latiſſimam partis arterioſae partem, baſin nempe, latitudine ſuperet.

Structura interna harum partium.

Vti nunc angulum cordis columnis intus quamplurimis ramificatis, cellisque et cauernulis, inſtructum eſſe dixi; apicem ventriculi pari ratione cauernoſum eſſe notum eſt, modo vt toti ventriculo vulgo promiſcue illae columnae adſcribantur, quae nonniſi in parte angulari et in apice reperiri ſolent. Pars media contra, pariter ac arterioſa tota, caua eſt intus parietesque aequales habet, fibris factos latioribus et planis, ex ſuperficie interna non eminentibus. Solas duas papillas continet, parietibus huius partis minime adnexas, e columnis apicis radicibus ſuis ortas, per mediam cauam hanc partem ad valuulas tranſeuntes orificii venoſi, iisque filamentis ſuis inſertas. Has equidem contracta ſyſtole pars caua complectitur, et opus eſt iis papillis, per cauitatem tranſeuntibus, aliquam eius partem occupantibus, nucleumque quaſi formantibus cauitatis; cum eo vsque, vt ſe mutuo tangant, parietes ventri-

(*a*) Tab. I. N. D. H.

(*b*) Tab. I. M. N.

ventriculi ſe contrahere nequeunt, et ſanguinem ergo omnem ſine horum nucleorum auxilio exprimere non poſſent.

Sanguinis per ventriculum motus in ſyſtole.

Ampliſſimum ergo et primarium haec pars caua ſanguinis receptaculum in dextro ventriculo efficit. Hoc recta fere parti reſpondet arterioſae, in eamque continuat. Vtrinque vero addita ei ſunt bina refugia illa, in quibus vberior recipitur ſanguis, angulus in dextro, apex in ſiniſtro latere. Conſtricto ergo per ſyſtolen ventriculo dextro, et eum, qui arterioſam partem replet, ſanguinem pellit, qui in hac caua parte continetur, ſanguis, et ſequitur continuo fugientem. Ex lateralibus receptaculis cauernoſis autem ſanguis preſſus oblique vna cum priori in infundibuliformem arterioſam partem vrgetur. Videndum ergo in ſequentibus erit, qua fibrarum diſpoſitione hi ſanguinis motus in ventriculo dextro efficiantur.

Et in diaſtole.

Caeterum etiam in diaſtole haec caua pars ventriculi primum ſanguine repleri videtur; cum annulus valvularum orificii venoſi recta huc ſanguinem ex ſinu impulſum ducat, et naturali ſua rigiditate parietes, etiam in ſtatu ſpontaneo aliquantum a ſe mutuo diſtent, vacuamque cauitatem forment. Ea repleta, ſanguis in apicem porro penetrat, et in partem ventriculi arterioſam. Denique et pars angularis, ſi ſatis copioſus ſanguis eſt, repletur.

Primaeua ventriculorum cordis figura, in ventriculo dextro cognoſcenda.

Haec vera eſt ergo ventriculi carnei dextri figura, ab

ab adipe, quae eam abſcondit partim, partim deformat, liberati. In ea natiuam aliquomodo et primaeuam illam formam intueri videmur, qua prima vitae periodo ventriculi gaudent. Qua laquei quaſi ventriculus, aut canalis curuati, et contra ſe ipſum adſcendentis, figuram repraeſentat, qua nec a vena differt praecedenti, aut a ſequenti arteria, niſi quod magis inflatus maiori praeditus ſit lumine et circumferentia, et quod in ipſa canalis flexione ſit poſitus. Deſcendit enim ſinus dexter anguſtior primo per venoſum orificium in partem ventriculi venoſam. Haec ampliſſima ergo ſimul et curuata pars eſt canalis primaeui, quam mediam maximamque partem ventriculi in embryone gallinaceo eſſe putamus. Deinde infundibuliformis pars arterioſa ventriculi ex venoſa adſcendendo in arteriam pulmonalem continuat; qua ea pars canalis primaeui exhibetur, quae, orta ex ampliſſima parte, flexaque contra ſe ipſum, anguſtior rurſum adſcendit. Simplicem ergo omnino, laquei embryonis ſimilem, canalem curuatum, ſiue reflexum, deſcendentem primo parte anguſtiori, deinde inflatum, ſimulque ſurſum curuatum, et anguſtiori denuo parte adſcendentem, in hominis adulti ventriculo dextro cognoſcimus; modo vt variae in diuerſis ſedibus huius canalis factae dilatationes eius figuram primaeuam quodammodo turbent. Earum prima ſcilicet auricula eſt in ſinu dextro; deinde angulus cordis et apex ventriculi in parte venoſa. Hae tanquam anevrismata ſiue tumores conſiderari poſſunt, a copioſo ſanguine irrumpente producti. Finge ergo, abeſſe haec aneurismata, ſimplex reſtabit canalis recuruatus. Dexterius nimirum ſimulque poſterius et inferius paululum ſinus dexter in partem ventriculi venoſam deſcendit. Inde ſiniſterius an-

 terius

terius et ſuperius recuruata pars arterioſa infundibulifor-
mis adſcendit. Pars annuli valuularis orificii venoſi an-
terior et ſiniſterior deſcendentem canalis partem ab ad-
ſcendente diſtinguit.

Ventriculus carneus ſiniſter ab inuoluto minus differt.

Ventriculus ſiniſter, tunica exutus, minus figura differre videtur ab inuoluto. Neque partes in eo, aut regiones, reperi peculiares, quae non ipſae iam et notatae eſſent; excepta ſola hac ſede retro conum arterioſum ventriculi dextri, ſiniſterius iuxta baſin aortae, vbi faſciculi quidam lati fibrarum, a baſi aortae ortarum, peculiarem partem ſuperficiei conuexae ventriculi huius, ſitu cum baſi cordis fere conuenientem, inter arterias magnas abſconditam, efficiunt, cuius in ſuperioribus mentionem iam feci.

In ſiniſtro ventriculo primaeua eius figura pariter viſibilis.

Primaeua caeterum canalis curuati figura facilius etiam in ſiniſtro fere quam in dextro ventriculo percipitur. Deſcendit poſterius et inferius ſinus pulmonalis in oualem cauitatem ventriculi; anterius ſuperiusque aorta inde oblique dextrorſum adſcendit. Partem canalis deſcendentem ab aſcendente anterior pars annuli valuularis diſtinguit. Vt bina orificia ergo, venoſum et arterioſum, ad diſtinctas canalis partes, illud ad deſcendentem, hoc ad adſcendentem, pertineat, media ampliſſima ventriculi pars autem, quo vsque valuula diſtinguens non deſcendit, vna cum apice ampliſſimam curuatam communem primaeui canalis partem efficiant.

DIDEL-

DIDELPHIS BRACHYVRA, DESCRIPTA

A

P. S. PALLAS.

Notiorem faciam Philandri ſeu *Didelphidis* ſpeciem inter congeneres omnes minime tritam et paucis cognitam. Nec enim copioſe ex America adfertur, ideoque plurimis Zoologis obſcura manſit et imperfecte hucusque cognita; dum contra affinem illi et ſtatura aequalem *Marmoſam* ſeu Didelphidem dorſigeram (*a*) omnes celebraverint.

 Inter

(*a*) Mus ſylueſtris americanus, Scalopes dictus; Marmoſa Braſilienſium *Seb. theſ. I. p. 48. 49. tab. 31. fig. 1. 2. 4. 5.* Philander americanus *Briſſon. quadr. ſp. 5.* Didelphis murina *Lin. ſyſt. ſp. 4.* et dorſigera *Eiusd. ſp. 5.* quippe non diſtinctae. La marmoſe *Buffon. hiſt. X. p. 335. tab. 52.* Catuli huius ſpeciei immaturi, coeci, vberis materni ventralis, orbiculati papillis ſuctione oris ita firmiter adhaerent, vt pendulos quaſi fructus circumferat mater. Piloſi autem et adultiores facti, dorſo matris inhaerere et caudis circa matris caudam cirrhorum inſtar implexis ſeſe appendere norunt.

Inter complures huius vltimae speciei icones etiam vnicam *Didelphidis brachyurae* nostrae figuram miscuit *Seba* (*thes. I. tab.* 31. *fig.* 6.) rudiorem quidem, sed e breui cauda facile tamen dignoscendam. Animal cum reliquis eiusdem tabulae, "Murem syluestrem americanum" appellat (*l. c. p.* 50. *n.* 6.); accepit mire foecundum esse, vt quolibet bimestri 9, 10 ad 12 catulos procreet; quemadmodum specimen, quod habuit *Seba*, cum duodecim catulis adhuc coecis et nudis, quorum aliquos vberi inhaerentes pinxit, adlatum fuerat. Accepit animal araneis potissimum vesci et in descriptione dorsi colorem recte obscure rufum obseruat. Neque praeter Sebae iconem citatam, eamque non laudandam vllam omnino ad naturam delineatam in Zoologorum libris extare certum est.

Brissonius tantum e Sebana descriptione et icone speciem nostram distinxit, et vocauit (Lib. *de Quadrup. sp.* 9.) "Philandrum obscure rufum in dorso, in ventre "heluum, cauda breui et crassa". Non minus iudiciose notauit eam et nomine "Philandri mammis extra abdo-„men, cauda breui, crassa et pilosa," recensuit *Gronouius* (*Zoophylac. fasc. I. p.* 9. *n.* 39) e cuius etiam museo vber alterius sexus olim delineatum communicabo.

Putaui

runt. Exprimit hoc celebris apud *Sebam* icon (*thes. vol. I. tab.* 21. *fig.* 4.) cuius pulcherrimum exemplar, inter Cimelia a *Diuo Imperatore Petro I.* redemta, adlatum extat in *Museo Academico* nostro, e quo certo certius constat, distinctam non esse a D. Marmosa, pulligeram hance Didelphidem; vt mireris acutissimum *Buffonium* hanc iconem in nouam Didelphidis speciem erexisse, quam inter non visa sibi animalia recenset. (*hist. XV. pag.* 157. *n.* 16).

Putaui primo *Linnaeum* quoque hanc ſpeciem voluiſſe, vbi in ſyſtemate a *Didelphide dorſigera* diſtinctam nominat *D. murinam*, itidem paruulam, citatque ad hanc ſupra indicatam *Sebae* figuram; ſed non ſolam, verum, aliis binis, eiusdem tabulae, ad D. dorſigeram pertinentibus, itemque alii ad Didelphidis Cayopollin marem referendae, iunctam. Perſpexi autem deinde e Prodromo ſecundi Tomi *Muſei Adolpho-Fridericiani*, vbi D. murinam ſuam deſcribit, Cel. Virum vnam eandemque ſpeciem, *Marmoſam* ſcilicet, duobus nominibus diſtinxiſſe. *D. murinae* enim deſcriptio Linnaeana in Marmoſam ad amusſim quadrat; neque dubium eſt *D. dorſigeram* ipſi dictam, etiam eſſe Marmoſam, quam ab Illo citati iconismi et auctorum loci omnino declarant.

Ill. *Buffonius*, qui in Didelphidum hiſtoria illuſtranda minime fuit otioſus, D. brachyuram noſtram plane non videtur cognouiſſe. Nec enim praeter D. Opoſſum, Cayopollin, Marmoſam et orientalem, vllam dari putat, niſi quod poſtea, neſcio qua ratione adductus, pulligeram Marmoſam ex Icone *Sebae* (*b*) pro quinta et diſtincta ſpecie adoptauerit. Ab iſtis vero omnibus noſtra diſtinctiſſima eſt, neque magis confundi debet, quam *D. ſetigera* (deinde ſtabilienda) de cuius pariter exiſtentia dubitauit Vir illuſtriſſimus.

In *Didelphide brachyura* noſtra omnes genericos characteres, e dentibus, pedibus, myſtace, habitu toto et anatome petendos, Natura curioſe ſeruauit; et quamuis

 trabe-

(*b*) Vid. not. praecedentem.

trabeculae osseae epigastricae seu *cornua peluis*, Didelphibus marsupialibus imprimis vtiles, huic speciei minus necessariae videantur, tamen has quoque, ne masculi quidem sceleto, cui imprimis superfluae sunt, insignes denegauit.

Comparatione formae atque circumcaesurae instituta, species nostra, *capite* magis cum D. Cayopollin s. *Philandro*, quam cum reliquis conuenit. Nec enim rostrum ita productum habet, ac *D. Opossum* et *setigera*; nec acutum, vt *Marmosa*. Hanc tamen *reliquo* corpore, et femina praesertim *vbere* orbiculari medii ventris nudo, imitatur. Defectu *sacci* ventralis, *pene* postice sub scroto exserendo, similibusque, *Marmosam* et *Philandrum* sequitur. Aliis vero momentis, praesertim *auriculis* et *caudae* breuitate, ab omnibus se distinguit, et solo colore facile inter congeneres emicat, pulcherrima Didelphidum iure dicenda, quam *Icon* adposita (Tab. V.) naturali magnitudine exprimit.

* * *

Aequat vel potius excedit tantillum Didelphidis dorsigerae molem, totaque artubus paulo crassior et robustior apparet, capitis vt dixi forma magis ad D. Philandrum accedens.

Nasus et *os* nudiuscula, albent. *Nasus* subtiliter grandinosus, stria didymus et naribus lunulatis, subcaninis instructus. *Mystaces* teneris pilis, in quinos fere ordines digestis, vt in congeneribus reliquis. *Verruca* biseta supra vtrum-


Fig. 1.
Fig. 2.
a
b
c
d
e
f
g
h
i
Fig. 3.
a
Fig. 4.
Fig. 5.
K


Fig 1
Fig 2
Fig 3.
Fig 4.
Fig 5.
K

vtramque orbitam; *parotica* magna, planiuſcula, ſetis binis myſtace maioribus, plurimisque minoribus, poſterius in arcum diſpoſitis ſparſa. Hae ſetae omnes atrae, extremo caneſcunt. *Pili* quatuor diſtantes ſub mento et quatuor in *verruca* gulae maiores, proximioresque, albidi. Hinc caput huic vt congeneribus omnibus vndique longis pilis quaſi radiatum.

Labium ſuperius ad dentes primores, praeter ſtriam naſi mediam, vtrinque tantum ſemel crenatum. *Inferius* integrum, lateraliter, pone caninos, velut cicatrice, obſolete exciſum. *Lingua* margine apicis papillis denticulata, vt in plerisque huius generis, caeteroquin mollis et ſubtiliter papilloſa. *Dentes* fere vt in D. Opoſſo, Philandro et dorſigera, de quibus infra, ad ſceleti deſcriptionem, dicam. *Palatum* arcubus nouem imbricatum.

Auriculae nudae, fuſceſcentes, craſſiuſculae et maiuſculae capitique adpreſſae, adeoque diuerſiſſimae ac in D. dorſigera. *Superior* pars ouata, anterius verſus baſin replicata et *antitrago* auriculaeformi reuoluta, cui incumbit *lamina* transuerſa, lobuliformis, e media interna ſuperficie exorta. *Poſterior* margo craſſeſcit in *tragum* obſoletum, infra quem craſſa lamina ad parotides fere deſcendit, cui continuum iugum flexuoſum, atrium meatus auditiui nauiculare vel reniforme coronans, et extra antitragum auriculae ſuperiori denuo continuatum.

Oculi inter naſum et auriculas medii, fiſſura palpebrarum longitudinali, *tragis* nudis, fuſcis. *Periophthalmi-*

um

um vltra duas tertias oculi extenſile, laxum, album, margine cartilaginoſo fuſcum. *Irides* fuſco-luteſcentes.

Pedes breues, maxime primores, omnes pentadactyli et ad exemplar generis conformati. *Digiti* ſubtiliter piloſi et inſtar murinae caudae tenerrime ſquamuloſi; tres medii in omnibus pedibus ſubaequales; interior ſ. *pollex* in palmis parallelus, in plantis remotiſſimus, apice bulboſus (vt in vniuerſo hoc genere). Reliquis *vnguiculi* luteſcentes, acuti. *Verrucae* calloſae volarum albidae, in palmis quaternae ad digitos diſtributae, cum impari ad carpi baſin; in plantis ternae ad digitos, et ad pollicis baſin binae. Cutis volarum inter callos fuſceſcit et quaſi puſtuloſa apparet.

In pedibus primoribus, ad antibrachii latus externum, *ſetulae* 2 diſtantes et ſubtus, prope carpi flexuram, puſtula cum ſetis binis, quarum interior minor.

Cauda breuior, quam in vlla alia ſpecie, e craſſa baſi adtenuata, ſupra ad tertiam fere longitudinis partem vellere dorſali continuato veſtita, ceteroquin murinae inſtar ſquamulis annulata et adſperſa pilis, ſupra et in extremitate fuſcis, ſubtus gryſeis.

Cutis animalis exalbida. *Vellus* molliſſimum laeue, nitidum. *Color*, in vertice et dorſo longitudinaliter niger, apicibus pilorum gryſeis murinus; per latera capitis et trunci, inque baſi artuum et caudae pulchre et ſaturatiſſime rufus, in collo ſubtus dilutior; trunco ſubtus gryſeopallidus, verſus imam aluum cineraſcens.

Scro-

Scrotum depreſſo-ſphaeroideum, obſoletiſſime didymum, pilis breuibus, albentibus pubeſcit. Baſis ſeu pedunculus eiusdem breuiſſimus, antice planus, poſtice plica frenatus, adeoque triqueter. *Ani* apertura plicata, a ſcroto remota; apertura pro genitali in atrio ani, plicis longitudinalibus conniuens. Tractus a ſcroto ad anum et ambitus ſcroti nuda et ſubrugoſa longitudinaliter. *Uber* feminae ventrale orbiculatum, nudum, papillis cylindricis vndecim conſitum (*Tab.* V. *fig.* 1.)

Menſuras animalis, hic ſubiungendas omnes e ſpecimine maſculo, nondum plane adulto deſumtas eſſe moneo:

Longitudo totius a naſo ad caudam - - -	5''. 6'''.
—— —— caudae ab ima baſi - - - -	2. 4.
—— —— totius capitis - - - -	1. $4\frac{1}{2}$.
—— —— roſtri ad canthum oculorum - -	0. 7.
—— —— fiſſurae palpebrarum - - -	0. $2\frac{1}{3}$.
Diſtantia auriculae ab oculo - - - -	0. 4.
—— a roſtri apice ad oris angulos - -	0. 8.
Altitudo auriculae ab imo atrii perpendicularis	0. $7\frac{1}{2}$.
Latitudo transuerſa maior eiusdem - - -	0. 5.
Longitudo pedum primorum a cubito ad carpum	1. 0.
—— —— poſticorum a genu ad calcaneum -	0. 11.
—— —— palmae cum vnguiculis - - -	0. 7.
—— —— digiti medii cum vngue (1'''.) -	0. $3\frac{1}{2}$.
—— —— plantae vsque ad apicem vnguium -	0. 9.
—— —— digiti plantae medii cum vngue ($1\frac{1}{6}$'''.)	0. $3\frac{1}{3}$.
—— —— pollicis plantarum - - -	0. $2\frac{5}{6}$.
Diameter transuerſus ſcroti - - - -	0. $5\frac{1}{2}$.

 Diame-

Diameter longitudinalis	- - - -	o. $4\frac{1}{2}$.
—— —— verticalis	- - - -	o. $3\frac{1}{2}$.
Diſtantia ſcroti ab orificio genitalis	- -	o. 4.

Ad *Anatomica* venio: *Palatum* arcubus nouem, prioribus lunatis, poſterioribus ſubbicuruis imbricatum. *Lobulus* pone dentes primores rugoſus. *Ingluuies* anguſte fornicata; *infundibulum* a cauo narium in fauces deſcendens, fere ſupra glottidem apertum. *Lingua* ſubtiliter papilloſa: papillis conicis, reclinatis, intermixtisque verſus marginem et baſin fungiformibus, minutiſſimis; extremum linguae planum, ora denticulatum papillis mollibus.

Hepar tripartitum; *Portiones* duo ſub diaphragmate, ſiniſterior craſſior, depreſſo-haemiſphaerica, ſubtus concaua, ad dorſi ſpinam ſubinciſa; *dexterior* iſti partim incumbens, inciſura in medio et ſinu profundo cyſtifero biloba, minus craſſa, ſupra gibbula. *Portio* tertia bipartita, *lacinia* altera ouato-acuminata, apice triquetra; *altera* ſpigeliana ſubtus canaliculata, apice vngulato in ventriculi ſinu poſita. *Cyſtis* mediocris, ductu communi inteſtino prope pylorum inſerta.

Lien omento inhaerens, ventriculo a dextris et dorſali parte laxe circumpoſitus, planus, lunatus vel potius rectangulus, in ipſo angulo latior, lobo breuiore antrorſum, altero acuminato extrorſum ventriculum amplexante.

Omentum ſupra inteſtina non deſcendit. *Pancreas* a ſinu lienis ad duodenum extenditur.

Ventri-

Ventriculus globoso-subouالis, magnitudine auellanae. *Pylorus* constrictus, amplior oesophago.

Intestinum versus pylorum calamo cygneo fere amplius, aliqua inde distantia (1″. 3‴.) contractius, hinc aequali amplitudine calami pergit, donec 1″. 3‴. a coeco in isthmum calami coruini vix capacem gracilescit, denuoque ampliatum, sensim denique versus coecum, magisque versus anum adtenuatur. Totius intestini longitudo 9″. 6‴. adeoque corporis minus dupla.

Coecum 1″. 3‴. distantia ab ano, longitudine 10. ad 11‴. arcuatum, intestino superaccubans et adnexum, apice subadtenuato obtusum, medio fere calami amplitudine, versus intestinum coarctatum.

Ren dexter tota sua longitudine superior vel anterior; *sinister* e vasorum fasciculo ceu pedunculo pendulus. *Glandula* suprarenalis sinistra, mediae fere spinae accubat, dimidio fere molis supra renis verticem antrorsum prominet; *dextra* contra hylo renis sui adsidet; vtraque lutea, subglobosa. *Renes* intus papilla vnica, acuta instructi.

Vesica vrinaria pisi capax, oblonga (*fig.* 2. *a.*). *Vasa spermatica* e truncis arteriae et venae magnae descendunt; funiculi per inguina et scroti pedunculum ad testes pergunt.

Testes (*fig.* 2. *bb.*) membrana propria, vna cum parastatis (*c c.*) a dorso interiusque circumpositis, in mo-

lem oualem, interiore latere planam constricti, eaque planitie sibi inuicem arcte accubant.

Epididymides f. parastatae (*cc.*) lunatae, planae, anteriore extremitate latiores, vtraque rotundatae. *Ductus deferentes* medio inter testes emergunt.

Vesiculae spermaticae (*dd.*) maximae, oblongae, inspissata materia ceu parenchymate quodam repletae, quod interne percurrit filum neruosum. Dextra paulo minor.

Glandulae extus circa anum plurimae: anterius vtrinque globuli duo cauernosi, caui, quorum interior minor (*fig.* 2 *e e.*); ad latus vtrinque *glandula* magna, ouali-globosa, parenchymatosa (*ff.*) et posterius vtrinque *bulbus* (*gg*) cauus, interna superficie quasi spongiosus.

Penis intra anum (*h.*) ipso in limine, apertura longitudinali paruula, bilabiata exserendus, supra pubem in curuaturam sigmoïdeam retractilis (*i.*), linearis, depressus. *Collum* glandis tereti-depressum, bisulcum; adeoque *glans* bipartita (*fig.* 3.) portione vtraque acuta, latere interiore plano accubans.

Pulmonum sinister minor, bilobus, superiore paruulo. Dexter quadrilobatus; *lobus superior* latiusculus, planus, emarginatus; *secundus* triqueter, cordi longitudinaliter appositus; *infimus*, cum inferiore sinistri lateris maiore, a dorso spectatus vngulam bubulam plane refert; *quartus* impar, triquetro-pyramidatus, angulo sinistro productus.

Cor

Cor maiusculum, situ prorsus, vt in humano cadauere, figura paulo globosius.

Sceleton circiter vt in congeneribus. *Cranium* multo breuius quam in D. Opossum, ceteroquin simile. *Maxilla* etiam simili ratione arcuata, anguloque ramorum introrsum mucrone subacuto, plano producta. Fissura palati, vt in eadem.

Dentes primores, quemadmodum in affinibus, infra octoni subaequales, medio distantes; *supra* in medio bini acutiusculi, a reliquis interuallo distantes et vtrinque quatuor aequales, conferti, adeoque decem. *Canini primarii* insignes, supra a primoribus late remoti; *Secundarii* vbique tres, breues, basi lati et vtrinque denticulo aucti, primores vbique minores. *Molares* supra quatuor breues, truncato-colliculosi introrsum distantes, postremus transuersim angustus: *infra* quatuor, omnes medio processu conico, bidentato producti, qui in superiorum interiora interualla incidunt.

Vertebrae colli septem: *atlas* ampliatus; *epistrophaeus* supra dilatatus et in cristam longitudinalem compressus; reliquae supra muticae, at sexta subtus vtrinque processu compresso prominens. *V. dorsales* XII. a secunda ad septimam spinis longe prominulae, retrorsum sensim decrescentibus, posteriorum vix vllis. *V. lumbares* VII. mediae praelongae. *Ossis sacri* portiones (in iuniore sceleto distinctae) sex, quarum prima vtrinque crassa apophysi articularis, reliquae vtrinque planis processibus alatae. *Cauda* constat articulis XII. praeter apicem terminalem; articuli

ticuli duo proximi facro vtrinque lamina, fub qua decurrunt tendines, alati; reliqui teretiufculi.

Coftae XII. verae feptem, quarum primae magnis interuallis diftant, vltimae approximatae. *Sternum* e quinque portionibus, quorum fumma mucrone producta, pro clauiculis articulandis. *Cartilago xyphoidea* ftylo offeo longo producta.

Peluis inftructus, etiam in mafculo, trabeculis abdominalibus (*fig.* 4. *a a*) exterius verfus bafin infigniter angulatis, latioribusque, quam in affinibus. *Cornua* peluis apte appellari poffunt.

Pedum digiti omnes phalange tertia breuiffimi; *pollices* tantum biarticulati, articulo extremo apice capitato, nec vnguiculifero.

Os hyoideum (*fig.* 5.) arcu inferiore lato, breui, cornibus truncato; fuperiore exili, cornibus adtenuatis, inflexis.

Longitudo cranii a crifta transuerfa occipitis ad apicem offium nafi	1''.	3'''.
—— —— maxillae infer. a condylis ad alueolos primores	0.	$11\frac{1}{2}$.
—— —— fpinae dorfi, ab atlante ad apicem caudae	6.	3.
—— —— vertebrarum colli	0.	7.
—— —— —— —— dorfi	1.	3.
—— —— —— —— lumbarium	1.	$\frac{1}{2}$.

Longi-

Longitudo ossis sacri	- - - -	0.	10.
—— —— sterni	- - - -	0.	11.
— — —— cartilaginis xyphoideae	- - -	0.	5½.
—— —— clauicularum	- - - - -	0.	5.
—— —— scapularum	- - - -	0.	7.
—— —— humerorum	- - - -	0.	9.
—— —— radii	- - - - - -	0.	8.
—— —— vlnae	- - - - - -	0.	9½.
—— —— ossium peluis	- - - - -	0.	10.
—— —— cornuum peluis	- - - -	0.	4.
—— —— femorum	- - - -	0.	10½.
—— —— tibiae	- - - - -	0.	10.
—— —— fibulae	- - - - -	0.	11.

In specimine liquore asseruato, quod pro anatome inseruiit, copiosissimi per totum corpus, maxime circa collum, confertisque agminibus circa scrotum et inguina, cuti inhaerebant *Pediculi acaroidei* (*fig.* 6.) Acaro coleopterorum minores, totaque corporis forma ad Acaros accedentes, nisi quod *pedibus* tantum senis instructi. Singularis eorum et constantissimus character erant *pili* in posteriore corporis parte vtrinque terni, quos figura optime exprimit.

EXA-

EXAMEN HYPOTHESEOS
DE
TRANSMVTATIONIBVS CORPORUM MINERALIVM, INSTITVTVM

A

I. I. FERBER.

§. 1.

Corpora naturalia affinitatis vinculo iungi et articulorum instar in catena, aut, si mauis, tamquam fila telae araneae inter se cohaerere, ita vt a perfectissimo h. e. maxime composito creatoris opere vsque ad simplicissima corpora anorga, per scalam quasi descendere liceat, veteres dudum animaduerterunt naturae scrutatores; et inter recentiores, celeberrimi viri a *Linné*, *Bonnet*, *Donati*, *Adanson*, *Hermann* (Argentoratensis) aliique extra omnem dubitationis aleam posuerunt. Continuitatis huius tot et tam clara extant documenta, vt cuilibet paulo attentius rerum naturam intuenti facile in oculos cadant. Deteguntur quotidie corpora antea non cognita, quae seriem hanc, vbi abrupta videbatur, nectunt, continuant, et nullum in natura saltum fieri, confirmant. Sicco, vt

vt

aiunt, pede regnum animale et vegetabile iam praetereundo, corpora fossilia propius considerare libet. Haec quidem vita et organisatione destituta, sola mixtione et inde fluentibus proprietatibus essentialiter a se inuicem differunt; characteres enim externi, artificiales corporum combinationes vel separationes, vsus denique, quo vitae humanae inseruiunt, ab intrinseca eorum indole pendent, examine chemico rite exploranda, antequam tuto dignosci et in commoda nostra verti possint. Iam vero innumerae fere mineralium corporum mixtiones in gremio terrae occurrunt; variae sunt proportiones partium, quibus componuntur, et modi diuersi, quibus coaluerunt. Oriuntur inde corpora plus minus diuersa et, quod eodem redit, plus minus conuenientia vel affinia, prout indole ac proportione partium constituentium et generationis modo magis minusve congruunt aut discrepant. Ponamus A, B, corpora esse mineralia, humana arte non diuisibilia, diuersae tamen indolis; horum commixtionem adeo variari posse, vt inde haud pauca oriantur producta, sola proportione partium distincta, nemo non videt. His iterum adiungantur alia corpora C, D, E, aeque simplicia, proportione per omnes gradus et modos combinationis aucta et mutata; longe maiorem vtique compositorum numerum et varietatem habebimus. Si iam horum nonnulla mechanice tantum adunata, alia intimiore mixtione, solutione, cristallisatione, fusione, sublimatione vel alio quocunque modo combinata fuerint, proprium sane habitum, proprias dotes singula producta acquirant, necesse est, iisdem quamuis principiis constent (*a*). Eiusmodi operationes

(*a*) Sulphur mercurio, triturando admixtum, puluerem nigrum porrigit,

nes per fecula inftituit natura et etiamnum continuat in fubterraneo fuo laboratorio; nouas itidem procreando formas, cum corpora dudum compofita refoluit aut plus minus alterat. Mirum igitur non eft, totum regnum minerale et fingula corpora illuc pertinentia affinitate quadam, ipfis medullis inhaerente, vniri, et quamuis varias prae fe ferant fpecies et formas externas, omnia tamen chemica analyfi in pauca principia refolui. Nobis omnino e re eft, vt varias illas mixtiones naturales, quae faepe occurrunt et femper fibi fimiles manent, propriis ac certis nominibus diftinguamus, quibus auditis ftatim intelligatur, de qua et quali mixtione naturali fermo fit. Exempli cauffa Argillam, Iafpidem, Gemmas, Micam, Schoerlum, Zeolithum, Feltfpatum nominaffe fufficiat; quin autem haec inter corpora, quorum nonnulla compofitione fatis conueniunt, varii adhuc intercedant gradus mixtionis intermedii, proportione partium aliquantulum differentes, a nemine negari poteft, qui analytico mineralium examini ipfe manus admouerit.

§. 2. Haec, ni fallor, concatenatam corporum mineralium feriem fatis fuperque demonftrant. Oritur vero ifta, prout vidimus, a fola mixtione et compofitionis modo, paulifper et pedetentim mutatis, quod probe obferuan-

---

qui Aethiops mineralis vocatur; his autem corporibus fublimatione vnitis, maffa dura, intus radiata vel ftriata, coloris rubri obtinetur, quae Cinnabaris dicitur. Aurum mufivum colorem auri, quo fulget, ante fublimationem non acquirit, fi vel omnia requifita mechanice commifcuntur. Calces induratae et vitra metallorum vna eademque materia conftant; textura autem, facie externa, colore, pelluciditate aliisque proprietatibus multum differunt, quoniam particulae diuerfo modo inter fe coaluerunt.

ſeruandum eſt, ne falſas inde deducamus concluſiones et rem aliter explicemus, quam veritati congruat aut idoneis experimentis chemicis euinci poſſit. Vereor tamen, ne obſeruationum mineralogicarum ſcriptores haud pauci, quorum ceterum meritis ac honori nil derogatum velim, in hunc errorem inciderint, cum ea, de qua locuti ſumus, corporum mineralium analogia vel affinitate freti, vnius transmutationem in alterum aſſeuerare non dubitarunt. Pauciſſimos libros mineralogici argumenti hodie euoluere licet, in quibus non transmutatoriae eiusmodi hypotheſes, ſibi inuicem haud raro e diametro oppoſitae, occurrant; et tanta ſane obſeruationum huc pertinentium copia obruimur, vt tempora Prothei rediiſſe et imperium Phoebadum fatidicarum ſibyllinasque artes reuiuiſcere facile dixeris. Specioſiſſima illis dudum inaedificantur ſyſtemata vel theoriae, originem et formationem telluris, montium, lapidum, metallorumque explicaturae, quae cum obſeruationibus mirum quantum lubricis et inter ſe diſcrepantibus innitantur, non poſſunt non vltra modum variare, multiplicari et ſibi inuicem contradicere. Quin haec omnia progreſſus ſcientiae magis retardent, quam promoueant, eosque ſaltem confundant, quibus in interiora naturae ſacraria introſpicere, vt quid credant ipſi ſciant, non contigit, nullum eſt dubium. Neceſſe igitur eſt, vt adcuratius examinentur hae hypotheſes et quid illis veri inſit, nec ne, perſpiciatur, quo facile patebit, phoenomena illa transmutationem quandam corporum mineralium innuentia longe aliter eſſe explicanda, quam a plerisque fieri ſolet, qui ſpecie veri ſeducti a recto tramite aberrant et coniecturarum mole ſolidiora cognitionis phyſicae telluris noſtrae fundamenta, vix inchoata, onerant et

 euer-

euertunt. Me quidem non fugit, celeberrimos Dominos *Bergmann*, *Wiegleb*, *Weigel*, *de Morveau*, *Baumé*, aliosque nonnullos, data occaſione in ſcriptis ſuis idem dudum breviter monuiſſe, paſſim oſtendendo, quid de his transmutationibus ſentiendum ſit; numero autem eorum indies creſcente, qui eiusmodi hypotheſibus fauent, operae pretium duxi, rem ab ouo, vt aiunt, repetere et ampliore tractatu ſingula argumenta penitius luſtrare, quibus aſſerta ſua adſtruere conantur.

§. 3. Eum in finem ante omnia videndum eſt, quid transmutatione corporum intellectum velint, qui hanc defendunt. Si veteres auctores, praeſertim eos, conſulimus, qui metallorum conuerſiones atque nobilitandi modos moliebantur, plurimi ſaltem obſcuris admodum et confuſis ideis laborabant, nec ipſi rationem reddere valebant, cur hac potius, quam alia via, metam propoſitam attingere quaererent. Hinc lepidae ſatis praeſcriptionum alchemicarum formulae oriebantur, rerum ſaepe incongruarum aut prorſus incompatibilium commixtiones, operationumque multifariae repetitiones, cohobationes, rotationes vel circulationes, omni fundamento deſtitutae, et id, quod antecedente labore vix perfectum erat, mox deſtruentes, quibus tamen aurum conficere aut ſaltem ignobilius metallum colore et grauitate eius ſpecifica imbuere tentarent. Horum etiamnum veſtigia premunt, qui certa quadam maturatione occulta, ſiue artis ſiue naturae auxilio perficienda, vnum terrarum vel ſalium genus in alterum conuerti poſſe contendunt, modum quamuis explicare neſciant, quo metamorphoſis illa peragatur. Recentiorum tamen plurimi, ſaniore philoſophia et profundiore rerum

natu-

naturalium cognitione instructi, absonis adeo praesuppositis opinionibus inhaerere nolentes, analogiam quandam corporum transmutabilium largiuntur non modo, sed necessariam ducunt, horumque metamorphosin ita peragi statuunt, vt vel artis vel naturae ope, partes quaedam nouae corpori transmutando adiungantur, aut antea immixtae ipsi auferantur, si qualitates alterius assumat. Longe maiori quidem probabilitate haec sententia sese commendat; eiusmodi vero corporis cuiusdam mutatio, quae accedente noua parte constitutiua aut ablata alia prius immixta oritur, nullo iure transmutatio vel transsubstantiatio dici potest, nisi verbis ludere et vocabulorum significatum vsu receptum flocci facere velimus; alkali enim, acido v. g. nitri vnitum, re ipsa alkali manet, dum rursus separatur, ideoque sub copula transmutatum non est; et quamdiu acido nitri ligatur, alkali nitratum, nec alkali purum dici meretur. Ita quoque modo inuerso gipsum acido vitriolico priuatum, non est amplius gipsum aut gipsum transmutatum, sed terra calcarea, qualis ante vnionem erat. Nulla igitur transmutatio, sed compositio aut separatio noua hac ratione perfici potest. Propriis modo principiis suis insisterent transmutationum defensores, ab accessu vel priuatione partis cuiusdam constitutivae illas deriuantes, veritati facile victas manus darent; nam corpus quod transmutatum credunt, examini chemico subiectum, parte aliqua orbatum vel noua auctum deprehenditur, ideoque corpus a priore diuersum est, nec idem dici meretur. Hoc vero examen communiter negligunt, eiusque loco meris coniecturis et lubricis admodum argumentis, a vicinia corporum, casu quodam fortuito coalitorum petitis, indulgent, miras rerum, toto

coelo diuerſarum transmutationes fingentes. Hanc ratiocinandi methodum grauiſſimis erroribus anſam praebere infra demonſtrabimus; ſolidiorem itaque, iam exponendam, ſequamur.

§. 4. Quod corpora mineralia, vtpote corpora mixta, eatenus affinia cenſenda ſunt, quatenus compoſitione h. e. indole interna conueniant, in antecedentibus dudum monuimus et a nemine in dubium vocari poteſt, qui generaliſſima tantum mineralium cognitione gaudet eorumque differentiam ab organicis corporibus rite perſpexerit. Indoles autem et mixtio compoſiti cuiusdam alia ratione tuto indagari nequit, quam vt chemica analyſi in partes ſuas reſoluatur (*a*). Plurima ſaltem mineralia decomponi poſſunt; de reliquis autem, quorum numero eſt Adamas, nihil certi conſtat, donec longiore forſan chemicorum induſtria decompoſitionis adminicula detegantur. Reſolutio corporum in infinitum tamen non progreditur, nec vlli mortalium huc vſque ſucceſſit, prima corporum elementa in lucem protrahere, ea ſane ſubtilitate donata, vt oculorum aciem effugiant et palpari nequeant. Analyſi exactiſſima eo vsque continuata, quo Chemiae ope vnquam fieri poteſt, tandem ſubtiliores partes reſtant, quae vlteriorem reſolutionem reſpuunt et principia corporum

(*a*) Sunt, qui analyſin corporum chemicam, via humida inſtitutam ſuſpectam reddere tentarunt; ab effectu, quem igne torta praeſtant, ad principia eorum potius concludentes. De valore autem huius opinionis chemicorum plurimi et facile principes hodie conueniunt, omneque dubium abſtulit celeb. *Bergmann* in Opuſc. Tom I. Praefat. p. VII, nec non in Comment., e 4to nouor. R. ſcient. Vpſal. Actor. Tomo excerptis, p. 72, 73.

rum remota aut remotissima vocari solent, a principiis primis vel elementis physicis probe distinguenda (*a*). Quin haec principia remota subtilioribus adhuc partibus composita sint, de eo dubium non est; cum vero nullis artis spagyricae adminiculis huc vsque diuidi queant, simplicium instar omnino considerari debent, donec methodus huic scopo apta et sufficiens innotuerit, ne conclusiones praemissis et ratiocinia experientiae anteponantur. Qui igitur iam negauerit, hoc vel illud eductum verum esse principium remotissimum, h. e. vltimum, non amplius diuisibile, corporis cuiusdam rite examinati, monstret viam necesse est, qua vlterius decomponi queat; monstret partes, quibus constat, analysi eliciendas; idemque corpus eductum ex iisdem partibus separatis rursus componat. Si vnum alterumue non valet, reliqua omnia, quae probabili forsan coniectura in medium proferri possunt, nihil demonstrant; a possibilitate enim vel probabilitate ad existentiam rei concludere non licet. Quae iam in genere dicta sunt, si ad certas classes mineralium speciatim applicantur; omnes lapidum et terrarum varietates (vt has exempli loco adducamus) ad 4 vel 5 terrarum genera primaria, vlteriorem resolutionem eludentia, reduci posse, constat. Haec igitur simplicium instar haberi debent, donec vlterioris decompositionis modus posteris forsan innotescat. Verum enim vero morae impatientes haud pauci iam praemature contendunt, has terras aut omnes aut saltem nonnullas sola modificatione inter se differre, ex eadem materie, in singulis paulisper alterata, constare, et vel

(*a*) Confer. *Bergmann* Dispositio praelect. chem. lingua *suecica* exarata, 1779. §§. 6 — 13.

vel artis vel naturae adminiculo in se inuicem conuerti posse. Vt haec asserta probent, iure postulamus; id autem fieri nequit, nisi 1°) e singulis istis terrarum modificationibus aut varietatibus subtilior quaedam materies, omnibus communis, eliciatur et coram monstretur, 2do) nisi peculiaria illa principia, quae communem materiem alterant aut modificant, e singulis terris separentur, et 3°) denique ex his principiis, materiae communi rursus vnitis, diuersae illae terrae iterum componantur. Nullum vero ex his postulatis in hunc vsque diem impletum aut perfectum est; terrae enim omnes, de quibus loquimur, vt supra dudum notauimus, vlteriorem decompositionem prorsus recusant, nec synthesis quaedam peragi potest, quamdiu partes componentes latent. Considerari itaque debent hae terrae tamquam simplices, inter se diuersae, quales re ipsa se praebent, dum aliis vniuntur corporibus v. g. Acidis; acidum enim vitriolicum terrae calcareae vnitum gipsum aut selenitem gignit; terrae argillaceae nuptum alumen, magnesiae adunatum salem ebshamensem porrigit, nec vnquam aliud corpus ex his combinationibus produci potest. Ita etiam, si aliis corporibus vniuntur hae terrae, diuerso semper effectu se produnt. Cum iam sales tam acidi, quam alkalini, et calces metallorum, in omnibus combinationibus inter se aequaliter differant; omni prorsus fundamento carent hypotheses, mutuas corporum transmutationes affirmantes.

§. 5. Generaliore hac conclusione, veris praemissis innixa, subsistere possem, nisi varia hinc inde obiicerentur exempla et speciales obseruationes, quibus hanc theori-

theoriam infringi putant nonnulli. Ne igitur quid reticeamus, quod a defenforibus transmutationum in fententiae fuae robur allatum fuerit, fingula eorum argumenta feorfim confideremus, cuique illa afferta fubordinando, quae hoc vel illo argumento maxime probatum iri confidunt. Nimia vero hypothefium refutandarum eft conuenientia, et frequentior obiectorum recurfus, quam vt repetitiones quaedam eorum, quae femel dicta funt, penitus euitari poterint. Lectores igitur rogo, ne eas mihi vitio vertant, quas plenaria rei dilucidatio poftulat. Neminem porro offendat, quod vnam alteramue fuam opinionem veritatis trutina a me ponderatam cernat; quaeftio enim enodari nequit, fi argumentum quoddam in contrariam partem adhibitum filentio praetermitterem eiusque valorem non examinarem, quod vt omni, qua par eft, verfus auctores obferuantia fiat, operam dabo, nec eiusmodi examen iis difpliciturum fore fpero, quibus ante omnia veritas curae cordique eft.

§. 6. Primum argumentum in fauorem transmutationum adhiberi folitum analogia nititur; conftat nimirum, rerum naturam a fimpliciffimis femper ordiri et ad magis compofita fenfim progredi, vnde probabile videtur, primam omnium corporum, ideoque et mineralium materiem non effe nifi vnicam, ex qua, fucceffiua fcilicet mutatione et modificatione reliqua omnia ac fingula corpora effinguntur. Hoc quod attinet, lubenter quidem concedo, naturae vi multa peragi poffe, quae arte humana non fuccedunt; an vero re ipfa peragantur, nec ne, an hoc vel alio modo, faepe ignoramus. Summo rerum opifici aeque facile fuit plura, ac vnum, terrarum, falium

 aut

aut metallorum genera creare. Quaeritur iam an vnum, an plura in primordiis rerum creauerit? Noſtra de operibus eius cognitio ex ipſis operibus haurienda eſt, nec ad vlteriora extendi poteſt aut debet, quam quae ex his colligere et demonſtrare licet. Si vltra progredimur, halucinamur plerumque et nubem pro Iunone amplectimur. Iam vero prima ſtamina ac primordia rerum nos prorſus latent; nihil igitur de occultis pronunciare, nihil certi ſtatuere poſſumus. Contra ea, ſalium, terrarum et calcium metallicarum certa nouimus genera, nulla etiamnum arte in ſimpliciora, pluribus communia, reſoluenda. Haec igitur a ſe inuicem diſtinguere conuenit, donec idoneis experimentis aliquando forſan demonſtrentur principia eorum proxima et remotiora. Coniecturis argumentorum loco vti, et id, quod veri quandam ſpeciem habet, pro veritate demonſtrata venditare, ſcientiae leges vetant. Tot itaque corpora pro diuerſis habenda, quot proprietatibus perſpicuis et permanentibus ab omnibus aliis differunt nullaque arte in ſe inuicem conuerti poſſunt. Conuerti autem nequeunt, quorum principia differentiam procreantia latent et ideo pro lubitu addi vel auferri non poſſunt. Si natura vnum alterumue forſan valet, quod plane ignoramus, nobis ideo tamen res confundere non licet, quae notis perſpicuis et conſtantibus inter ſe differunt, ſemper ſibi ſimiles manent et omnem noſtram diuiſionem chemicam eludunt. Id de terris primitiuis, vti vocantur, experientia teſte, iure affirmatur. Has ideo coaeuas eſſe, veriſimilius mihi videtur, quam quod vna ab altera originem trahat. Nullae ſaltem rationes extant, quibus vnam, antiquitate alteram ſuperare probari poſſit; petram enim, ſi antiquiſſimam, quam nouimus, granitoſam (*a*) puta,

puta, confideramus, terras facile omnes compagem eius intrare et particulas aggregatas: quarzum, feltfpatum et micam, quibus componitur, efficere, chemica analyfi detegimus. (*b*) Mirum itaque non eft, acida granitem adgredi et inde quidpiam foluere, prout recte obferuauit clariff. *Well* et adcuratiore examine oftendit D. *Bayen* in diar. phyf. Rozier. 1779. Decemb. p. 450. etc. Hinc autem concludere, terram filiceam, in granite omnino praefentem, at non folitariam, a terra calcarea ortum trahere et hanc in illam mutari, id rectae ratiocinandi methodo prorfus repugnat. Datur quidem circulus vel rotatio quaedam in natura, ita vt vnius deftructio fit alterius generatio; omnes vero mutationes corporum inde profluentes additione aut amiffione partis cuiusdam ingredientis vel plurium fimul partium, aut etiam immutatione cohaefionis, texturae, formae externae, aliarumque qualitatum fuperficialium abfoluuntur, nec vnquam pro veris et intrinfecis materiae transfubftantiationibus haberi poffunt. Has fi nomine tranfitus aut progreffionis vnius corporis in alterum comprehendere velis, prout mineralogis mos obtinuit, non refragabor, modo omnis euitetur confufio et hic dicendi modus, quo ipfe faepe vfus fum,

 ab

(*a*) Me quidem non fugit, recentiorum nonnullos omnem operam nauare, vt antiquitatem huius faxi, quam primus, ni fallor, fcriptis meis oftendere et confirmare ftudui, dubiam faltem reddant. *D. Lamanon* fe originem Granitis calcaream et animalem demonftraturum promifit, reliquas vt taceam obiectiones bene multas, ab aliis in medium prolatas. Sed de hac re alia occafione fufius agam.

(*b*) Vid. *D. Bergmann* Sciagraph. R. mineralis §§. 122, 125, 130.

ab idea verae transmutationis probe distinguatur. Aliud enim est, si dicis: Argilla mollis valde martialis, siliceo copioso mixta, induratione transit in iaspidem, progressione in variis punctis sensim aucta et visibili; aliud est, si inde infers, argillam puram vel terram aluminarem in siliceam mutari. Quamprimum nempe argillae purae advenit martiale et siliceum vberiore quantitate, non est amplius argilla pura, sed nouum corpus mixtum: terra deriuatiua, iam nominatis particulis contaminata, neutiquam vero transmutata. Idem quoque de terra calcarea et silicea mixtis valet. Vbi contra lapis argillaceus induratus, schistus argillaceus etc. vi aeris, frigoris, caloris et aquae meteoricae, cohaerentiam particularum tollente, in argillam mollem soluitur, aut calcareus in cretam; hanc argillam a schisto argillaceo ortam, vel hos lapides, si mauis, in illas terras transiisse, recte dicis. Vbi tamen, sub fatiscentia corporum particulae quaedam volatiles in auras simul tolluntur, aut, interueniente tertio corpore, maiori attractione electiua donato, nonnullae partes separantur, aut denique e corpore quodam mixto, certa principia solubilia aqua extrahuntur, abluuntur et auferuntur, id, quod manet, idem non est corpus, quod antea erat, compositione iam alterata. Nullus igitur transitus proprie loquendo, nulla multo minus transmutatio, sed vera decompositio et separatio in hoc casu locum habet; alias enim cuprum, ex aqua vitriolica, mediante ferro praecipitatum, vt veteres crediderunt, verum esset ferrum in cuprum transmutatum, et ochra ferri post fatiscentiam pyritis residua, iam adhuc pyrites, transsubstantiatione quadam in ochram transformatus salutari mereretur, id quod absonum est dicere et somniis oeconomorum

quo-

quorundam, nulla cognitione Botanices praeditorum, de transmutationibus frumentorum, aequiualeret. Recte igitur intelligenda et applicanda ſunt vocabula, quibus geneſin mineralium explicare volumus, ne logomachiis et falſis opinionibus locus detur, frequentiore tandem vſu in conſuetudinem abeuntibus, et in prouincia ſcientiae, ciuitatis iura acquirentibus.

§. 7. Argumentum ſecundum, cui ſuas de transmutatione corporum mineralium opiniones ſuperſtruere conantur auctores haud pauci, hoc eſt, quia autopſia et attentiore mineralium inſpectione, in fruſtis, vbi plura lapidum genera aut plures ſpecies cohaerent, facile eſt videre, vnam terram in aliam, vnumue lapidem in alterum tranſire et ſenſim mutari. In muſeis curioſorum integrae collectiones ſeruantur et in ſcriptis mineralogicis innumerae fere obſeruationes narrantur, quibus progreſſiuam lapidum terrarumque transmutationem probare volunt fautores huius hypotheſis. Fruſtula mineralium quod attinet eo fine collecta, vt hunc tranſitum ante oculos ponant, me quidem iudice parum vel nihil demonſtrant; nam ictu mallei ita diuidi et formari poſſunt, vt ei, qui ſola inſpectione oculari acquieſcit et ſe hoc modo ſolo de indole ac geneſi foſſilium aliquid certi ſtatuere poſſe arbitratur, quicquid placuerit perſuadeant omnesque hypotheſes aeque probabiles et fide dignas reddant. In anguſtiſſimo petrae ſpatio magna terrarum, lapidum, ſalium, bituminum et minerarum varietas ſaepe coadunatur. Eiusmodi vero ſaxum eiusue portionem pro lubitu et intentione colligentis diuidere licet ita, vt hae vel illae terrae, hi nec alii lapides etc. cohaereant, reliqui ſeparentur. Ca-

 vendum

vendum igitur eſt, ne a ſpeciminibus mineralium in muſeis viſis nimium concludatur. Quod ad obſeruationes attinet, in ipſis montibus et fodinis inſtitutas, hae quidem maximi momenti et multiplicis vſus ſunt, ſi ab homine perito pluries repetitae, vbique coincidentes repertae et cum examine chemico coniunctae fuerint; oculis enim ſolis fidere, corporum mineralium vetat conditio interna, ab exteriore ſpecie et forma ſaepe diuerſiſſima. Qualitates ſuperficiales, ſitum et diſpoſitionem corporum mineralium in ſinu terrae, oculis omnino diſcernere licet; interna autem eorum compoſitio et indoles viſu et inſpectione oculari vix erui poteſt. Coniungantur igitur ſedulo obſeruationes mineralogicae, in ipſis locis natalibus factae cum examine chemico corporum ibi reperiundorum, ſi geneſin eorum inueſtigare et diiudicare velimus, quae his adminiculis omnibus adhibitis tamen non ſemper patet, multo minus, ſi vnum ex his adhibeatur, altero neglecto. Quemadmodum enim partes conſtitutiuae corporis cuiusdam variis modis vniri poſſunt et re ipſa a natura vniuntur (§. 1. not. *a.*), nec ideo tamen, e corpore ſeparatae, viam aut operationem ſemper indicant, qua vnitae erant: ita etiam ſolo intuitu explorari nequit, quaenam partes corpori inſint, aut qua ratione coalitae et in praeſentem formam redactae fuerint. Quicquid igitur de ortu et geneſi mineralium in medium proferatur, duplici eget demonſtratione amiciſſime coniungenda: chemica nimirum et mineralogica proprie ſic dicta, in locis natalibus facta. Vtraque exactiſſima et ſolidiſſima ſit, oportet, ſi quid probet, nec lubrica, coniecturis inhaerens aut fugitiuo oculo vel ſcrutinio compilata. Mirum autem eſt, quantopere negligatur praeſtantiſſimae ſcientiae chemicae ſtudium aut

vſus

vſus ſaltem practicus a recentioribus nonnullis mineralogis, qui obſeruata ſua cum orbe erudito communicant, ſola inſpectione oculari vel leuiſſimis tantum tentaminibus, chalybe et aqua forti inſtitutis, contenti. Hos inter quosdam inuenimus, qui in arte obſeruandi parum verſati et exercitati ſunt, qui vix alia, quam empirica mineralium cognitione gaudent, et ſcientiae phyſicae montium, fodinarum, reique metallicae imperiti, ea quae vident, rite intelligere et explicare nequeunt. Scribimus vero docti indoctique. Hinc tot ſchismata, tanta ſententiarum divortia, tot lites, contrariae opiniones, obſeruationes et phoenomenorum explicationes quotidie oriuntur, vt omnes memoria tenere et inter ſe componere herculeus labor ſit, et tandem certitudo omnis ruat vel ſaltem tenebris inuoluatur. Magna igitur opus eſt circumſpectione, ne eiusmodi obſeruationibus nimiam fidem praebeamus, earumque ductu a veritatibus centies demonſtratis ſecedamus. Haec generaliter monere neceſſarium duxi, vt varia transmutationum exempla, quae ab auctoribus nonnullis parum doctis et methodo recte videndi minus aſſuetis omni fere pagina adferuntur, in recenſione eorum, quae a viris longe maiore eruditione conſpicuis proponi ſolent, omittere poſſim. Horum vero examen vt iam incipiamus, inſtituti ratio poſtulat. Ea primum adducenda ſunt, quae obſeruationibus ſuperficialibus nituntur.

§. 8. Terram calcaream primigeniam et reliquarum matrem eſſe, haud pauci credunt, quia omnium ſubtiliſſima, maxime ſolubilis cenſetur, et tanta copia in ſuperficie terrae inuenitur, vt integra montium iuga, ſatis alta, conſtituat, in quibus nulla petrefactorum corporum

veſtigia

veſtigia reperire licuit. Silices interdum fouet pyromachos magna copia. Horum plurimi cruſta calcarea veſtiuntur et nucleos calcareos continent; nonnulli chalybe percuſſi vix ſcintillant et aqua forti humectati vix efferueſcunt. Concluditur hinc, ſilices non eſſe aliud, quam terram calcaream, vel ſucco quodam lapidificante (*a.*) (nunquam demonſtrato) imbutam, vel interueniente acido quodam mutatam, ſenſim ſenſimque ſiliceam duritiem aſſumentem; pyromachos igitur, cum acidis et chalybe debilem admodum reactionem exercentes quaſi in biuio inter calcem et ſilicem conſtitutos, nec etiamnum perfectos aut maturos eſſe, ita vt natura hanc transmutationem calcis perficiens ſub ipſo opere vel labore deprehenſa ſit, et quae ſunt reliqua. Indolem acidi, miram adeo calcis mutationem operantis alii vitriolicam putant, e pyritibus fateſcentibus ortam (*b*), alii ab aqua, dum flocculos vireſcentes deponit, iisque corrumpitur et aceſcit, deducunt (*c*), quo mediante, vel etiam ope acidi atmoſphaerici, initio rerum creati, terrae calcareae aut argillaceae vniti, ſilices fere omnes: Quarzum, Pyromachum, Petroſilicem, Arenam, productos eſſe aſſeritur (*d*). Huic terrae calcareae transmutationi in ſilicem varii mineralogi patrocinantur, in explicatione phoenomeni nonnihil a ſe recedentes. Praeter eos, quos in notis adduxi, Celeb. a *Linné*, *Abilgaard*, *Delium*, *Well* et *Caroſi* nominaſſe ſufficiat; omnium enim

ac

(*a*) Veterum plurimi ita opinabantur, et nuper *D. Bacheley* in Diar. phyſ. anni 1782, ſuplemento p. 81. etc. Pariſiis edito aſſerit.

(*b*) *D. A. Mann*, mem. de l'Acad. Imp. de Bruxelles Tome III. Journal de l'Academie.

(*c*) *D. Wallerii* Syſt. min. Tom. I. p. 292—294.

(*d*) *Waller*. Cogitat. de format. mundi edit. ſuec. p. 65 et 105—107.

ac ſingulorum effata hic et in ceteris adferre, nimis longum et taedioſum foret. Pace horum virorum clariſſimorum meam iam ſententiam rationibus ſuffultam in medium proferam. Quod ad ſubtilitatem et ſolubilitatem terrae calcareae attinet, haec quidem maior non eſt, quam reliquarum terrarum alkalinarum, et ſi re ipſa in his proprietatibus ceteris palmam praeriperet, ideo tamen illis antiquior vel primigenia cenſeri nequit; eadem enim argumentandi ratione ad reliqua corpora mineralia applicata, v. gr. metalla, de his quoque a ſolubilitate et ſubtilitate quadam maiori iudicari poſſet, quaenam vetuſtate reliqua antecellerent, quod nemini in mentem venit. Abundantia terrae calcareae, in ſuperficie telluris obuia nil prorſus demonſtrat; nec video, quomodo calculo erui poſſit, num terra calcarea ſiliceam quantitate ſuperet, nec ne. Corpora petrefacta in granite certius deſunt, quam in calcareo lapide; hanc igitur ob cauſſam, multis aliis vnitam, iure meritoque hoc ſaxum antiquiſſimum habetur, quod de calcareo non aeque affirmari poteſt. Acidum quoddam, praeter aëreum igne expellendum, manente terra calcarea pura, e lapide calcareo puro hucusque elici non potuit. Vbi ei immixtum eſt vitriolicum, gipſum oritur plus minus ſaturatum, non vero ſilex aut pyromachus. Aqua corrumpendo communiter putreſcit, nec aceſcit, et particulae vireſcentes, quas initio monſtrat, terreſtres ſunt, aquae immixtae, interdum forſan vegetabilis proſapiae, conferuulae minutae vel aliae particulae vegetabiles (*a*). Acidum huius regni in calcareo nunquam

(*a*) M. Senebier dans le lournal de Phyſ. 1781. Mars, p. 209. etc.

quam repertum eſt, et ſi adeſſet, ſalem medium terreſtrem, nec ſilicem formaret. E ſilicibus autem, quantum noui, acidum vitriolicum aut aliud quoddam iam nominatorum expelli nequit, multo minus e terra calcarea et acido quodam ſilex componi poteſt. Facile tamen intelligitur, cur ſilices pyromachi, magna copia calcis inquinati, chalybe percuſſi non ſcintillent et cum acidis non efferueſcant. Reperiuntur nonnulli, quorum vnum idemque fruſtulum in aliis punctis ſcintillat, in aliis non, ſed acidis efferueſcit! Qua vnquam ratione demonſtrari poteſt, eiusmodi fruſtula in nonnullis punctis maturiora, in aliis eſſe imperfectiora; et vnde conditio tam diuerſa vnius eiusdemque fruſtuli deduci et explicari poſſet? Facile autem haec variatio intelligitur, quam primum obſeruatur, terram calcaream ſilici immixtam, per totam maſſam non aequaliter eſſe diſtributam; ſi enim malleo contunditur eiusmodi ſilex et ſedulo ſeparantur fruſtula, quae diuerſum adeo effectum edunt, ſingula ſeorſim examini chemico ſubmittendo, ſtatim patebit, nonnulla terra calcarea, reliqua ſilicea abundare, vnde diuerſae eorum proprietates neceſſario oriuntur. Pari modo lapis calcareus, montes altitudine conſpicuos vel ſtrata terrae ſecundaria variarum regionum efficiens, hinc inde heterogeneis particulis ita contaminatur, vt proprietate cum acidis efferveſcendi interdum vel penitus priuetur, vel debili tantum gaudeat. Accidit hoc, cum acido vitrioli e pyritibus decompoſitis euoluto plus minus ſaturatur et in gipſeam indolem abit. Accidit quoque, vbi vel argilla, vel terra ſilicea, vel ferrum denique compagem intrat, et tunc, ſi ſatis induratus eſt lapis iſte, chalybe percuſſus ſcintillat. Sic marmora Finlandiae haud pauca, vt pleniore analyſi

a D.

a D. Professore *Georgi* instituta breui patebit, terrae argillaceae, ferri, silicei, forsan et magnesiae quidpiam continent, et propter intimum particularum nexum aut duritiem lapidis, his partibus peregrinis inquinati, chalybe percussa scintillas prouocant. Sex marmoris species *D. Bayen* examinauit, quae omnes praeter basin calcaream, argillam, magnesiam, quarzum et ferrum continebant (*a*). Alium lapidem calcareum, quem supradecompositum vocant, Liber Baro de *Seruieres* et D. *Vincentius* de *Villas* in Diar. phys. Suplemento Anni 1782. p. 394. etc. descripserunt. An mirum est, corpora tot particulis heterogeneis mixta, alios effectus edere, alias notas et proprietates, tam externas, quam internas prodere, quam idem corpus purum? Examinentur modo calcarei omnes scintillantes; peregrini quid in illis semper inuenietur, calcareo puro nunquam scintillas prouocante. Cum iam igitur partim a mixtione corporum, partim a nexu particularum omnes hi effectus et proprietates variantes feliciter et naturae conuenienter explicari possint, cur alias quaeso vagas nulloque modo demonstrabiles quaerimus phoenomenorum explicationes et imaginarias corporum transmutationes ac maturationes? Calcareus acido vitriolico imbutus non amplius calcareus est, sed selenites aut gipsum, plus minus saturatum; argilla mixtus, Margodes; siliceo et ferro contaminatus, Calcareus impurus salutari meretur. Quam lubrico ideoque fundamento eiusmodi lapides, lapides medii vel calcarei transmutationem passi aut in biuio constituti dicantur, nemo non videt. Vbi de situ aut vetustate montis stratiue aliis incumbentis ser-

 mo

(*a*) Journal de Physique 1778, Juillet, p. 49. etc.

mo eſt, eiusmodi inquinamenta et variationes petrae principalis in cenſum non veniunt. Denominatio tum vtique a potiori fiat, et ſaxum v. gr. calcareum, cuius maſſa aut volumen fere totum calce puriore conſtat, Calcareum vocari debet, neglectis peregrinis hinc illinc parcius immixtis heterogeneis, alicubi lapidi aliam indolem impertientibus. Vbi vero de geneſi lapidum agitur, quam attentiſſime inquirendum eſt, quaenam particulae homogeneae, quaenam heterogeneae vel peregrinae ſint. Totum nimirum regnum minerale corpora continet mixta, nec vnicum forſan perfecte purum inuenitur. Acida fere omnia non niſi ligata vel alkaliis vnita cruſta telluris profert. Nonnullae ſaltem terrarum primitiuarum nondum ſolitariae inuentae ſunt. Si haec corpora initio forſan libera exſtiterunt, ſucceſſiuis tamen naturae operationibus et geocosmi mutationibus inter ſe commixta ſunt. Diſtingui itaque debent eſſentiales, vt ita dicam, mixtiones ab accidentalibus, caſu quodam arceſſitis (*a*), id quod ſaepe negligitur.

(*a*) Alkali volatile et vnguinoſi quid, phlogiſto originem debens, argillis ſaepe immixta ſunt. Acidum vitrioli et terra ſilicea iis ſaepe etiam inhaerent. Magneſia aërata in argillis et ſchiſtis aluminaribus nonnullis, nec non in conchyliis ſtratorum calcareorum, et in calcareo ſolido ſiue particulis impalpabilibus compoſito, obſeruante Celeb. *Bergmann* (in Geograph. phyſ. Tom. I. p. 368 et Tom. II. p. 305, 306.) reperitur. Duriſſima marmora, particulis partim impalpabilibus, partim ſalinis compoſita, magneſiam continere, expertus eſt Celeb. *de Morveau* (Journ. de Phyſ. 1781. T. I. p. 226.) In marmore carrarienſi vero magneſiam deficere teſtatur D. Quatremere Diionual (Iourn. de Phyſ. 1781. T. II. p. 346 etc.) Amianthum, qui parum Magneſiae continebat, memorat *D. Sauſſure* (Voyag. dans les Alpes p. 89 etc.) Nitrum natiuum in lapidibus calcareis interdum contineri legitur in Diar. phyſ. 1778, Martio p. 283.

gligitur. Mirum non eſt, ſilicem exempli loco, in geode argillaceo intus parietes veſtientem, particulis calcareis paucioribus ſcatere, quam qui ſtrata calcarea implet et in illis locum natalem inuenit. Quarzum in fodinis cobalti ſaepe occurrens niuei coloris, immo diaphanum interdum, alkali fuſum, vitrum haud raro porrigit dilute caeruleſcens. Tale quoque obtinetur, ſi criſtallus montana puriſſima in furno, vbi vitrum ſmaltae conficitur, ope alkali funditur, ob vapores cobalti in furno ſuperſtites. Viſmuthum cobalto mixtum frittam caeruleam reddit, purum autem non ita. Nemo ſobrius vero dicat, quarzum et viſmuthum, propter hunc effectum mere accidentalem, vel etiam, quia in vno eodemque fruſtulo in fodinis ſaepe vniuntur, indole ac geneſi ſua conuenire communemque originem agnoſcere. Ita tamen in aliis caſibus ratiocinantur nonnulli, innumeras metamorphoſes fingentes, vbi fortuito vel propter viciniam loci corpora vniuntur toto coelo diuerſa. Petrefacta repcriuntur tam animalia, quam vegetabilia, materia calcarea vel ſilicea penetrata vel imbuta et conſumtis tandem partibus fere omnibus organicis, veram calcem aut ſilicem, chalcedonium, agathem etc. exhibentia. Curni dicis, ſilicem omnem transmutationi cuidam corporis animalis vel vegetabilis, ligni etc. originem debere? Durities corporum nota eſt externa, extemporaneae eorum explorationi nonnunquam inſeruiens. Eſſentialis tamen neutiquam eſt, nec internam, a mixtione pendentem indolem ſemper reuelat. Ab intimiore tan-

 tum

283. Ferrum plurimis corporibus immixtum eſt; nec albiſſima terra argillacea, fiſtulis tabacariis inſeruiens, aut criſtallus montana perfecte diaphana, omni inquinamento martiali carent (*Bergmann* Geogr. phyſ. T. II. p. 321.)

tum nexu vel cohaesione particularum deriuatur, multis igitur variationibus obnoxia (*a*); lapides enim molliores, silicei portionem quamuis abundantiorem contineant, vix tamen scintillant; nec omne, quod chalybe percussum scintillat, silex est. Eadem sane ambiguitate reliqui characteres superficiarii premuntur (*b*), quibus tamen solis vtuntur, qui genesin mineralium oculorum acie aut microscopii ope indagare et diiudicare volunt. Isti characteres ne quidem ad dignoscenda corpora mineralia semper sufficiunt; vnde confusiones rerum falsaeque obseruationes oriuntur, quarum exempla praesto sunt plurima. Saxum aluminare Tolfense, argillaceae omnino indolis, prout in literis ex Italia scriptis obseruaui, propter albedinem a plerisque antea calcareum credebatur, quia examen chemicum negligerant. (*c*). Idem sane de collibus leucogaeis prope

(*a*) *Cfr. Bergmann* Sciagraph. R. min. §. 8. et Acta holmiens. 1777. p. 348; vel noua Detecta chem, a *D. Crell* edita P. IV. p. 146.

(*b*) Grauitas specifica, a densitate atomorum, vt ita dicam, deducenda, ob frequentissima fossilium inquinamenta, raro mineralogis vsum quendam praestat; cum grauitas specifica mixti cuiusdam, grauitati cognitae ingredientium proportionata non sit. Forma externa mineralium, inprimis cristallina, annotari sane meretur et varietates obseruatu dignas determinat. Egregium hoc respectu opus est Cristallographiae Dni. *Romé de L'Isle* editio secunda. Cum autem nobis persuadere conatur vir clarissimus, formas cristallorum, in singulis generibus quin et specibus mineralium, incredibili modo variantes, ab intrinseca corporum indole pendere et characteres diagnosticos essentiales, mixtionem ipsam patefacientes porrigere; cognitionem porro harum formarum geographiae physicae basin solidissimam et fere vnicam constituere, his hyperbolis subscribere quotidiana vetat experientia et studii mineralogici longior consuetudo.

(*c*) Lettres sur la Mineralogie d'Italie par M. *Ferber*, traduites par M. *le B. de Dietrich*, p. 316, 317, notte *c*.

prope ſolfataram valet (*a*). Cruſta albi coloris, chalcedonios, agathos, aliosque lapides, ſiliceos dictos, interdum veſtiens, a multis ſemper calcarea habita eſt, quamvis acidis non efferveſcat; quoniam tentamina leuiſſima, guttulis quibusdam acidi nitri abſoluenda, omiſerant, oculis ſuis fidentes et analogiae, ſilicem pyromachum cruſta calcarea ſaepe indutum videntes. (*b*). Granatos lauis antiquis inhaerentes Abbas *de la Torre* marcaſitas vocauit, et a Canonico *Ricupero* Schoerlus Pyrites ſalutatur, obſeruante *D. Sauſſure* in itinere alpeſtri, Tomo 1°. p. 67—68. Idem auctor celeberrimus, p. 52 in nota, D[no]. *Desmareſt* vitio vertit, quod Feltſpatum cum fluore ſpatoſo confundat, in quo errore haud paucos ſocios in Gallia habet, hos lapides, gipſum ſpatoſum et marmor metallicum dictum, quod terra ponderoſa conſtat, a ſe inuicem vix diſtinguentes. Adfert porro *D. Sauſſure*, p. 65, D[num]. *Monnet* in diario phyſico pariſienſi Schoerlorum examen tradentem, horum loco Asbeſtum torſiſſe, quod ideo forſan accidit, quia *D. Sage*, Asbeſtos, Schoerlis adnumerat, (*c*). Lithomarga, terra ſteatitica, magneſiam continens, ſaepe cum argilla communi confunditur. Laua antiquiſſima montium euganeorum, griſei coloris, lamellis ſchoerlaceis impleta, a nonnullis cum granite confunditur, et eius nomine inſignitur (*d*). Ochrae Wismuthi, coloris viride-

(*a*) ibid. p. 257. notte IIII.

(*b*) Traductio anglicana Mineralogiae Dni. *Cronſtedt*, a *D. ab Engeſtröm*, p. 64. nota Ima §i. 56.

(*c*) Sauſſure Voyages p. 85—86. et Sage Elemens de mineralog. docimaſt. 2de edit. T. I. p. 217—219.

(*d*) In ſcriptis *D. Strange*, et a *D. Koeſtlin* in literis, quas *D. Klipſtein*

ridefcentis (Zeiſiggrün) meminit *D. Charpentier* in Hiſtor. min. Saxon. p. 265. Vereor ne ochra Niccoli fuerit, vtpote quae hoc colore gaudet, communiter tamen magis diluto; calx autem Wismuthi pallide luteſcens eſt. Plura exempla adferre ſuperuacaneum duco. Quae iam allata ſunt, ſatis probant, quam neceſſariae ſint chemicae analyſes, vt corpora mineralia diſtincte et certo cognoſcantur. Rite autem cognita, nec quoad nomen, nec quoad originem inter ſe confundi poſſunt; manente enim vna eademque mixtione, idem eſt corpus vel eadem ſpecies, ſola figura, duritie, colore, aut textura partium forſan varians. Vbi vero principio quodam vel auctum vel ſpoliatum fuerit, non amplius idem, ſed nouum corpus eſt. Idcirco omnis de transmutationibus theoria, ab inſpectione oculari vel facie externa, loco natali aut vicinia et adhaerentia corporum depromta, iure irrita et fallax cenſetur. Quod ad mineralia mechanice mixta vel adunata, ſaxa loquor et petras aggregatas, attinet, in his quidem pro increſcente vel decreſcente partium integrantium proportione, progreſſio quaedam obtinet et tranſitus quidam ideo ſtatui poſſe videtur, at primo tantum intuitu, ſi ſyſtema-

---

ſtein edidit. Videatur huius mineralogiſcher Briefwechſel, 1s Bändchen, p. 62. Lauam antiquam euganeorum Itali quidem granitello vocant, quia granitis inſtar maculata eſt; hanc vero et omnem granitem pro ignis ſobole habent. *D. Koeſtlin* contra, hanc lauam vulcani imperio eripere, Neptunique ſubiicere conatur, loco ſupra citato et in faſciculo animaduerſionum ſuarum 1780 edito, p. 35. Neſcio quales montes inter euganeos clar. *Koeſtlin* obſeruauerit; id vero certo certius affeuerare poſſum, ſaxa euganea, a me in literis meis ex Italia deſcripta, vera laua vulcanica, reliquis antiquioribus ſimili, conſtare, nec vllo vnquam modo genuinae petrae granitoſae annumerari poſſe.

ſtematicis diuiſionibus ſtricte inhaerere volumus; quamuis enim mechanica tantum partium coalitio hic locum habeat, proportio tamen variat, ſi eaedem manent partes. Si mutantur, aut nonnullas amittendo, aut novas acquirendo, nouum exſurgit ſaxi genus, noua aut alia ſpecies vel varietas, quae probe diſtingui debet, vbi de geneſi aut mineralogica cognitione agitur. Quod autem eiusmodi ſaxorum variationes locales, reſpectu maſſae totius montis vel ſtrati, mole ſua parum ſignificantes, in conſideratione geologica ſitus et vetuſtatis ſaxi etc. nihil ad ad rem faciant, iam ſupra (§. anteced.) monui et alia occaſione amplius demonſtrabo.

§. 9. De opinione eorum, qui terram calcaream primigeniam ſilicumque matrem credunt, fuſius diſſerui, vt reliquas transmutationes breuius, quantum fieri poteſt, expedirem; aliis enim aut fortioribus non ſtipantur argumentis, quam quae dudum attulimus, et eodem fere modo, ac illa hypotheſis, refutantur. Sunt, qui huic contrariam plane de terra calcarea fouent opinionem, eamque et cretam a ſilicea, quam primigeniam dicunt, fatiſcendo (*a*) oriri, contendant. Ex his, inter recentiores eminent D. *Buffon*, *Baumé*, et alii in Gallia et Italia, qui eorum veſtigia premunt. Horum plurimi globum noſtrum terraqueum initio totum quantum vitreum, igne fuſum fuiſſe autumant, omniaque corpora mineralia, ſuperficie et fra-ctura

(*a*) *Neumann* in opere chemico-pharmaceutico, d'Arcet de montibus pyrenaeis, edit. german. p. 51, et Buquet Introd. au Regne miner. Tome I. p. 101.

ctura nitida, vitro arteficiali aut ſcoriis vulcanicis quodammodo ſimilia, vtpote quarzum, arenam, feltſpatum, fluorem, micam, asbeſtum, ſchiſtum micaceum, granitem et longe plura foſſilia, indolis etiamnum vitreſcentis eſſe, aſſerunt. Reliqua mineralia, quae vitrum non adeo perfecte aemulantur, quo argillam, lapides apyros etc. referunt, ex antecedentibus deſtructis et mutatis originem trahere affirmant. Addit D. *Baumé*, argillam vel terram aluminarem e terra ſilicea, acido vitrioli ſoluta vel vnita, componi; cum vero hanc ſuam ſententiam non meris argumentis ſuperficialibus, a facie externa corporum, oculis vſurpanda, deſumtis, verum experimentis potius chemicis profundioribus comprobatam voluerit vir celeberrimus, de ea non hoc loco, ſed infra, nobis dicendum erit. Ad reliqua aſſerta quod attinet, paucis me expediam. Silex millies vſtus et aqua extinctus nunquam terram calcaream vel cretam largitur, ſi eam antea immixtam non continebat, ſed terram ſiliceam, albeſcentem quidem, ideo vero non cretaceam. Calcinantur ſilices pyromachi in Anglia et alibi, vt puluerem candidum omnino, ſed ſiliceum, praebeant, argillae puriori admiſcendum, vnde vaſa fictilia: Stone-ware dicta, parantur. Ea denique corpora, quae vitrum vel ſcorias colore, nitore aut pellucidate quodammodo referunt, non ideo tamen, ſaltem non omnia, vitreſcentis indolis ſunt, aut in hunc lapidum ordinem referri debent. Leuiſſimo examine chemico inſtituto, de eo facile conuincimur. Lapides haud ita pridem pro veris vitreſcentibus habiti, penitiore analyſi argillaceae potius indolis inuenti ſunt, vt gemmae, ſchoerli, granati. Durities, qua chalybe percuſſi ſcintillant, vitreſcentium lapidum, hoc eſt, in quibus terra ſilicea abundat et ad mentem

tem plurimorum mineralogorum totam fere maſſam conſtituit, ſola ſaltem, admodum lubrica eſt nota; gleba enim argillacea fortiter vſta vel ſatis indurata eundem edit effectum. Varii lapides, ad vitreſcentes aut ſiliceos puriores olim relati, et ſaxa bene multa, huic ordini annumerata, vtpote granitoſa, porphyrea, cotacea, cornea, ſchiſtoſo-quarzoſa, reliqua, dum aeris et temporis iniuriis diſſoluuntur et dilabuntur, non calcem ſed argillam porrigunt. Absque omni vero transmutationis adminiculo hoc phoenomenon explicari poteſt; ſaxa enim iam nominata magnam terrae argillaceae copiam continent. Terra igitur ſilicea nec in calcaream, nec argillaceam mutatur.

§. 10. Omnem Calcem deſtructis conchyliis et coralliis adſcribendam eſſe illuſtriſſimi viri a *Linné* et *Buffon*, in multis aliis rebus valde diſſentientes, nec non D. *Sage* aliique, docuerunt. Haec quidem opinio nullam transmutationem proprie inuoluit, nec iis placet, qui his maxime dediti ſunt; meam tamen eam non facio. Toties dudum reprehenſa eſt, vt hoc labore ſuperſedeam. A me eo tantum fine heic adfertur, vt ſententiarum diuortia eo melius eluceſcant; fateri autem cogor, plurima argumenta, quibus refutari ſolet, parum ſane valere, quod alia forſan occaſione amplius exponam. Terram demum calcaream vetuſtiorum montium huius generis, ab aqua natam et depoſitam ſuſpicatur celeberr. D. *Gerhard*; qua autem ratione geneſis explicetur, non video. Adeſt haec terra plerumque in quarzo et ſchoerlo granitis, ſaepe quoque in aliis partibus integrantibus huius petrae, Gneiſſi, etc.; reperitur quoque in nidulis et venis horum ſaxorum. Numne decompoſitione quadam horum lapidum,

 initio

initio mollium, et ſeparatione a reliquis eorum principiis proximis, ſub vehementioribus telluris commotionibus et mutationibus primordialibus, ſeiungi, et in aqua, ſaxa tum obtegente, praecipitari potuit? Numne ita forſan orta ſunt et explicari poſſunt ſtrata lapidis calcarei ſalini vel ſqamoſi, in montibus nonnullis Gneiſſi obvia? Hanc quidem coniecturam demonſtrare nequeo, nec veritatis probatae inſtar propono; ea autem longe maiore probabilitate gaudet, quam ſi cum celeb. D. *Charpentier* contendis, ſtrata calcarea in gneiſſo obuia, a gneiſſi ipſius transmutatione producta fuiſſe, id quod chemicis principiis prorſus repugnat. Supra dudum monui (§. 6.) terras omnes, primitiuas dictas, compoſitionem granitis inire, ideoque coaeuas eſſe cenſendas. Si itaque ſtrata calcarea talia in granite reperirentur, qualia in gneiſſo inueniuntur, graniti ſine dubio coaeua eſſent. Quod ad gneiſſum vero eiusque ſtrata calcarea attinet, alia res eſt. Terram argillaceam a calce deriuant omnes, qui hanc primigeniam credunt. A gipſo natam, poſtulatur in Medical Magazine menſis Iulii 1775, quod Londini prodit. Modo autem analyſis chemica argillae purae vel terrae aluminaris rite inſtituatur, diſſibabuntur hae nebulae, meteoricarum inſtar, lucem fugientes. Magneſiam albam propter ſimilitudinem cum terra calcarea veram eſſe terram calcaream pauliſper alteratam celeb. D. *Wallerius* (*a*) contendit; alio autem ſimul vtitur argumento chemico, infra adducendo.

§. 11. Si iam ad terras deriuatiuas aut lapidum genera, e primitiuis mixtis compoſita progredimur, non mino-

(*a*) Cogit. de origine mundi, edit. ſuec. p. 65.

minorem ſane de ortu eorum opinionum diſcrepantiam animaduertimus. Vidit quidam, Topaſios, Beryllos et fluorem ſpatoſum lithomargae inhaerere, et hos lapides ab hac terra omnes pronotos credit (*a*). Vbi igitur hos lapides quarzo, minerae ferri, aliisue mineralibus inhaerentes deprehendimus, eos ex his diuerſis generari credere fas eſt, ſi a coëxiſtentia ad cauſſalitatem, vt aiunt, valet concluſio. Alius (*b*) fluorem ſpatoſum ſpato calcareo inſiſtentem inuenit, vnde priorem ab hoc ſpato ortum credit. Felſpatum argillae progeniem eſſe, affirmat D. *Greville*, narrante D. *Woulfe* in Philoſ. Transact. Vol. 69. P. I. 1779. Argillam quidem continet, praeterea autem ſiliceam et magneſiae portionem. Gipſum in Chalcedonium et Agathem, Zeolithum quoque in Chalcedonium tranſire, D^ni^. *Caroſi* et *Cappel* ideo contendunt, quia vicinia ſaepe iunguntur hi lapides in vno eodemque fruſtulo, et progreſſio quaedam ſucceſſiuae mutationis oculis videri poteſt (*c*). Schoerlos et Zeolithos omnes originem vulcanicam habere, et dum aliis lapidibus aut ſaxis adnati vel immixti ſunt, eorum quoque originem vulcanicam ſemper oſtendere, varii aſſerunt; quoniam ſcoerlus et zeolithus in lauis nonnullis reperiuntur. Reperiuntur autem hi lapides quoque in ſaxis originis aqueae, alia vt taceam argumenta a D. *Bergman* propoſita (*d*). Marmora et

Mm 3 alaba-

(*a*) *Moiſienkow* de minera ſtanni, germanice, p. 84 — 88.

(*b*) *Gualandris* lettere odeporiche.

(*c*) Herr Caroſi über die Erzeugung des Kieſels ꝛc. und Herr Cappel in den Abhandl. der däniſchen Akad. der Wiſſenſch. und in Herr Brückmanns Beiträgen zur Abhandl. von Edelſteinen, 2te Fortſezung S. 140, 141.

(*d*) *Bergman* Opuſcul. phyſ. et chem. Vol. III. p. 224. — 229.

alabaſtra variegata ſobolem eſſe pumicis et lauae, vaporibus calidis ſalinis, ſulphurreis, aluminoſis etc. calcinatae, et pumicem e bitumine ortum trahere, autopſia confirmari credit nobiliſſimus D. *Hamilton* (*a*). Amiantum quoque omnem vulcanicum eſſe productum, quia ſimile corpus interdum in vſtrinis ferreis gignitur, D. *Grignon* (*b*) concludit. Pumicem vero asbeſtis potius originem debere, quam hos igni, analyſi chemica veriſimile redditur (*c*), non tamen certo conſtat; prout enim partes conſtitutiuae, in asbeſto et pumice valde conuenientes, via humida vniri poſſunt et re ipſa vniuntur in Asbeſtum, ita etiam via ſicca vel igne vulcanico eaedem hae partes in pumicem congeri poſſunt, nec ideo pumicem ab asbeſtis, aut hos ab igne vel laua ferrifera ortum petere, vt affirmemus, neceſſe eſt. Eodem modo Baſaltes cum ſaxo Trapp quoad principia conſtitutiua, et cum certis mineris ferri aliisve lapidibus (*d*), ab aqua productis, quoad formam ſiue figuram columnarum, conuenire poteſt et re ipſa conuenit; ideo vero eundem aut ſimilem generationis modum his omnibus foſſiliis adſcribere, me quidem iudice, obſeruationibus in locis natalibus inſtitutis, cum examine chemi-

---

(*a*) In literis Domino *Maty*, Secretario ſociet. anglicae miſſis, quae in traductione germanica obſeruationum eius de Veſuuio, Ætna etc. p. 192, ſeq. inſeruntur; in magno vero opere *Hamiltoniano* de campis phlegraeis et in traductione gallica eiusdem ab Abbate D. *Giraud-Soulauie* facta, neſcio cur, excluduntur.

(*b*) Memoires de Phyſique ſur l'Art de fabriquer le fer &c. par Mr. *Grignon* à Paris 1775. in 4to.

(*c*) *Bergmann* Opuſc. phyſ. chem. Vol. 3. p. 196 — 198.

(*d*) Faſciculus animaduerſionum phyſiologici atque mineralogico-chemici argumenti, auctore C. H. *Koeſtlin*, p. 36.

chemico amice ſemper coniungendis (§. 7.) non congruit. Vniri a natura poſſunt vna eademque principia duplici modo, via nimirum aut humida, aut ſicca, vti vocant, ope ignis; et corpora inde prodeuntia, diuerſo quamuis modo combinata, chemico examini ſubiecta, neceſſario conuenientiam ac paritatem principiorum monſtrabunt.

§. 12. Argillae communi mica ſaepius immixta eſt, praeſertim vbi deſtructis ſaxis granitoſis, corneis et micaceo-ſchiſtoſis natalia debet. Quaerunt nonnulli, an argilla e mica, aut haec ab argilla oriatur? Varia metalla, et horum numero argentum quoque, in ſaxo: Gneisſum dicto, hoſpitantur; haec igitur transmutatione quadam ipſius ſaxi aut matricis progigni, Domino *Charpentier* veriſimile videtur. Granitem in calcem mutari poſſe D. *Collini* autumat (*a*). Omnium denique generum lapides: calcareos, argillaceos, ſiliceos et ex his mixtos vel aggregatos: granitoſos, porphyraceos, ſchiſtoſos etc., initio rerum eosdem et perfecte ſibi ſimiles; ſucceſſu temporis tantum ab iniuriis aëris, diuerſo modo mutatos et in hodiernum ſtatum redactos fuiſſe, nuper affirmauit D. *Güſsmann* (*b*), non obſtante maxima horum lapidum differentia quoad indolem ſuam, ſitum in montibus, reliqua. Heu me, iam ſatis eſt! Plura transmutationum omnium rerum exempla adferre taedet non modo, ſed ſuperuacaneum foret, his auditis. Omnia inſuper eodem fundamento nituntur, obſeruationibus nempe ſuperficialibus, a vicinia

(*a*) Conſiderations ſur les montagnes vulcaniques p. 5.

(*b*) Beiträge zur Beſtimmung des Alters unſrer Erde ꝛc. von Franz Güſsmann, 2r Theil. Wien 1783 in 8vo.

vicinia et congerie corporum diuerſorum accidentali deſumtis, merisque tandem coniecturis, quae nihil probant. Facili negotio diiudicari poterunt ſingulae hae opiniones, facile explicari et intelligi phoenomena, circa quae verſantur, omnesque gordii nodi ſolui, qui auctoribus nonnullis tantam pariunt difficultatem, modo principia corporum conſtitutiua in examen vocentur et his rite cognitis adiungantur verae obſeruationes mineralogicae, a peritis in arte explorandi et explicandi naturae aufractus, inſtitutae, nec praeſuppoſitis ideis, lubricisque ingenii fictionibus ſuperſtructae, aut fugitiuo oculo factae.

§. 13. Tertium denique argumentum, quo ſua de transmutationibus corporum mineralium aſſerta confirmare ſtudent varii auctores, omnium grauiſſimum et efficaciſſimum fore, nullum eſt dubium, ſi firmo ſatis talo niteretur et rigoroſius examen ſuſtineret. Experimenta loquor chemica, quibus vnum alterumue corpus minerale encheireſi ſynthetica ab aliis producere vel communem corporum originem demonſtrare tentarunt nonnulli. Syntheſis vero, quae analyſi ſimul non probatur, parum vel nihil euincit; dubii potius plena eſt et impuritatem ingredientium adhibitorum haud raro indicat. Ordine ſane inuerſo procedunt, qui corpora componere tentant, quorum partes compoſitioni neceſſarias non cognoſcant; ſaltem hac ratione certitudo nulla acquiri poteſt. Reliqua experimenta chemica quod attinet, quibus generalis quaedam corporum analogia vel conuenientia in hoc vel illo tentamine patet; cauendum eſt maxime, ne fallaciae concludendo committantur, aut ab vno alteroue ſimili effectu indoles perfecte eadem vel conſentanea deriuetur. Dantur corpora,

ra, quae certis criteriis chemicis, tertio corpori vnita, vel alia ratione explorata, miram inter ſe conuenientiam monſtrant; in aliis autem periculis et combinationibus inſignem differentiam produnt. Si hanc iam negligimus, priorem ſolam notando et inde concludendo, haec corpora vna eademque indole gaudere, communemque originem habere, fallimur omnino et res diuerſas confundimus. Sic omnes quidem terrae alkalinae acida valde appetunt, cum illis in amplexus ruunt, et ſales medios terreſtres conſtituunt; ideo autem concludere, earum elementa eſſe identica, omnesque terra ſimpliciore componi, quam abſorbentem vocarunt Domini *Sage*, *Romé de L'Isle* et *Demeſte*, cum ſingulae tamen eidem acido vnitae diuerſos admodum ſales medios porrigunt, Logices regulae vetant (*a*). Qualem vero demonſtrationem dare teneatur, qui identitatem harum terrarum affirmat, §. 4ta expoſui. His in genere praemiſſis, ſpecialiora opinionum commenta propius examinare conuenit.

§. 14. Agmen ducant pericula illa eo fine inſtituta, vt probetur, aquam puriſſimam non eſſe aliud, quam terram fluidam, vtpote quae iteratis multoties triturationibus et deſtillationibus, tota tandem in puluiſculum terreſtrem mutetur. Si res ita ſe haberet, aqua omnino mineralis eſſet proſapiae, in hoc praeterea regno omnibus fere corporibus immixta et vehiculum praebens, quo ſolvantur,

(*a*) Conferantur obſeruationes D. de *Morveau* in diario phyſico Pariſ. 1781, Martio p. 216. etc. et Iulio p. 68. etc., nec non tractatus D. *Bernard* ibid. anno 1782, Ianuar. p. 43. etc.

vantur, circumferantur et aptis locis deponantur, quemadmodum et integra montium iuga terraeque ſtrata, olim ex aqua delapſa et depoſita nouimus. Iure igitur haec hypotheſis in disquiſitione mineralogica recenſetur. Ei autem refutandae vt immoremur, non vacat, cum clariſſimi viri *Lauoiſier*, *Krazenſtein*, *Scheele* et *Fontana* adcuratiſſimis experimentis in hac re nobis otium fecerint (*a*). Corruunt iam igitur omnes hypotheſes de origine geocosmi terrarumque primitiuarum e. g. calcis etc. ex aqua, huic transmutationi ſuperſtructae, nullamque prorſus fidem meretur experimentum, luſoria quadam arte ab alchemico quodam *Hafniae* inſtitutum (*b*), quo aquam puram, guttulas nonnullas liquoris, arcani inſtar habiti, inſtillando, in ſilicem durum, pellucidum mutaſſe fertur. Occultas eiusmodi artes, de quibus gloriantur nonnulli, inprimis vero circumforanei, omni prorſus cognitione deſtituti, phyſicorum attentione indignas eſſe, nec niſi manuum celeritate aut fraude, vt credulos decipiant, peragi, quotidiana docet experientia. Valde igitur fallit et fallitur, qui eiusmodi hiſtoriolis aliquid probari poſſe, ſibi perſuadet. Fuit nonnemo, qui ab aqua adamantes conficere tentauit. Alium hominem nouimus, qui ſe fruſtula minora huius gemmae in vnicum lapidem maioris molis cogere poſſe venditabat;

(*a*) Acta literar. Vniuerſ. Hafnienſ. 1778, Iournal de Phyſique 1771, Iuillet p. 78. 1779. Mars p. 161. 1782. Mai p. 396. *Scheele* tractatus de aëre et igne Praefat. p. 10. edit. 2d.

(*b*) Narrante D. *Cappel* in nou. Detect. chem celeb. *Crellii* P. 2da. p. 59. Nomen huius Alchemici *Schmidt* erat, teſte D. *Krazenſtein* in Act. liter. hafn. anni 1778, qui demum Curlandiam adibat, ibique otio fruebatur plurium annorum, quod tentaminibus aurum parandi impenderet; vnde facile iudicari poteſt, quid de experimento eius, qua aquam in ſilicem mutaret, ſentiendum ſit.

ditabat; tota vero ſcientia in eo conſiſtebat, vt gemmas hunc in finem ipſi traditas, poſſeſſori nunquam redderet.

§. 15. Acida omnia in ſe inuicem commutari poſſe et vnicum tantum vniuerſale, reliquorum matrem exiſtere, a multis retro temporibus dictum ſcriptum extat, neutiquam autem demonſtratum eſt. Noua potius indies deteguntur in omnibus naturae regnis, cognitorum numerum augentia et nulla arte in haec transmutabilia. Sunt, qui contendunt (*Stahliani* fere omnes et D. *Sage*) acidum vitriolicum ſola modificatione a natura in nitroſum et muriaticum conuerti. Modum quoque, quo fiat, indicat D. *Sage* in Elementis Mineralogiae docimaſticae T. I. p. 8, 9., experimentum addens, quo id probari exiſtimat. Praeter ea autem, quae ſolide dudum regeſta ſunt in Diario phyſico pariſienſi (*a*), obſeruandum eſt, explicationem experimenti, a D. *Sage* datam, opinione praeſuppoſita vnice niti, quam omnes fere chemici, eo excepto, hodie falſam putant, acidum nempe vitriolicum äeri atmoſphaerico vbique eſſe immixtum. Ruente igitur hoc fundamento experimentum nihil aliud probat, quam quod alkali volatile e ſale ammoniaco expulſum et in ſolutionem cupri adhibitum, purum non fuit, ſed acido ſalis inquinatum. D. *Comes de Saluces* alia pericula, transmutationem acidi vitriolici in nitroſum et muriaticum probatura inſtituit, quae in diario phyſ. pariſ. 1782. Novembr. p. 381 etc., nec non in nouis detectis chem. D. *Crellii* P. VIII. p. 6. etc. narrantur. Haec autem repeti

 neque-

(*a*) Journal de Phyſique 1772, Avril p. 44, 45, vbi paginis ſequentibus aliae quoque transmutationes examinantur.

nequeunt, antequam vberiorem defcriptionem, quam promifit, publicauerit Illuftr. auctor, quod an factum fit, nec ne, ignoro. De illis igitur certi quid pronunciare nolo. Vereor autem, ne illufione quadam chemica deceptus fuerit candidiffimus vir; principia faltem conftitutiua acidi nitri, ab eo enumerata, a nemine alio huc vsque inueniri potuerunt, nec iis, quae ab aliis dudum hac de re obferuata funt, congruunt. Totus denique proceffus, locis citatis breuiter tantum indicatus, adeo complicatus videtur, tot ingredientia, de impuritate fufpecta, congerit, vt nifi multoties omni circumfpectione repetatur, nihil prorfus decidat. Idem de afferto D. *Librae*, Equitis *de Sabinow*, Bohemenfis, valet, qui e fale communi fe nitrum paraffe contendit (*a*). In diario phyfico parifenfi anni 1780, menfis Martii, p. 212 extant literae Dni. *Dombey*, Lima peruuianorum fcriptae, in quibus fe ad oras maris pacifici magnam copiam nitri fimulque plantarum carnofarum, vt vocantur, inueniffe aflerit. Hae plantae omnes fale muriatico impletae erant, ab aqua marina olim littus inundante, folo impertito et ab illis reforpto. Hinc verifimile ipfi videtur, nitrum natiuum, quod e terra efflorefcit, fali marino natales debere, longo forfan temporis tractu quoad indolem mutato. Vt hac de re certior fieret, experimenta inftituere coepit, quae autem, dum fcriberet, non ad finem perduxerat. Nouimus quidem, regiam academiam parifienfem iuffu Regis Galliae praemium propofuiffe, vt natura nitri et vberior eius confectio cognofcatur et promoueatur; huc vsque autem ars nulla innotuit, qua corpus aliud falinum in nitrum converti

(*a*) Annales literar. Gothae euulgat. 1782. No. I.

verti poſſit. Meminiſſe iuuat, in hac mea disquiſitione non de poſſibilitate aut impoſſibilitate eiusmodi mutationis, ſiue artis ſiue naturae auxilio peragendae, ambigi et disputari; quia hac de re nihil etiamnum nouimus; ſed de eo tantum quaeri, quod ſolide demonſtratum fuerit et re ipſa exiſtat.

§. 16. Exiſtimant nonnulli, acidum nitroſum potius, quam vitriolicum, primigenium eſſe et atmoſphaerae inhaerere (*a*). Acido muriatico alii (*b*), phoſphoreo D. *Sage* (*c*), aëreo vel aëri fixo D. *Prieſtley* et *Landriani* (*d*) hunc honorem tribuunt. Singuli ſuam opinionem variis rationibus confirmant; nemo autem vnam alteramue analyſi et ſyntheſi ſimul demonſtrauit (*e*); recipi igitur

 ne-

(*a*) Varii auctores, confectionem nitri docentes.

(*b*) Adferuntur nonnulli a celeberr. D. *Wallerio* in ſyſt. mineral. Tom. 2do, p. 24.

(*c*) Elemens de Mineralogie docimaſt. Tom. I, p. 6.

(*d*) *Landriani* Opuſcoli fiſico-chemichi. Milano 1781. p. 59 &c. & Journal de Phyſique 1782, Aout, p. 106.

(*e*) Generaliore hac obſeruatione, omnino ſufficiente, hic ſubſiſtere cogor; ſi omnia enim momenta ad vmbilicum perducere vellem, librum nec tractatum conſcriberem. Ne quid tamen deſideretur, exempli gratia pauca de ſententia celeb. *Landriani*, vtpote recentiſſima, monenda ſubiungam. Ponamus acidum aëreum in omnibus acidis mineralibus contineri, ideo tamen non ſequitur, haec ab illo ſolo originem trahere. Plurima ſane corpora, quae iam ſimplicium inſtar conſiderare conuenit, in poſterum decomponi eorumque principia conſtitutiua ſeparari poſſe, vt largiamur, nihil impedit; hoc facto autem nullo iure affirmari poterit, vnicum ex his principiis totum corpus conſtituere, dum plura adſunt, multo minus, transmutatione aut modificatione quadam in tot et tam di-
verſa

nequeunt, ſed corpora criteriis certis et conſtantibus a ſe inuicem diſcernibilia, quae aliis iuncta corporibus diuerſo ſemper effectu ſe produnt, rectius omnino a ſe inuicem diſtinguuntur (§. 4 et 6.) quam confunduntur. Acidum muriaticum a Gipſo oriri, ob praeſentiam huius lapidis in fodinis ſalis gemmae autumat D. *Charpentier* (*a*); chemicis vero argumentis haec transmutatio demonſtrari nequit, iis potius confutatur. Acidum fluoris ab acido ſalis originem trahere D. *Boulanger*, ab acido vitriolico D. *Prieſtley* et *Monnet* aſſeruerunt; idemque forſan, ſilicea materia onuſtum, terrae volatilis inſtar habuit D. *Achard*; hoc vero

verſa corpora transformari, ac ſingula acida mineralia re ipſa ſunt. Diuerſa ſemper manebunt, quae aliis partibus conſtant, quamuis vna alteraue communi gaudeant. Ceterum mirum non eſt, acidum aëreum, vtpote omnium debiliſſimum, e corporibus quibus inhaeret, fortioribus acidis expelli; hoc autem expulſum pars tantum eſt corporis, e quo expellebatur, nec corpus totum, multo minus pars menſtrui, ad expellendum acidum debilius, adhibiti. Concedamus porro, acida: nitroſum, muriaticum, vitriolicum, phoſphoreum et arſenicale, certae portioni terrae vnita, aërem purum vel dephlogiſticatum largiri et hunc accedente ſtatim phlogiſto acidum aëreum progignere; hoc tamen acidum, qua tale, antea dictis acidis adfuiſſe ideo dici nequit; nam phlogiſto opus habuit (ex hypotheſi) vt aëreum vel mephiticum fieret. Antequam igitur ex acido aëreo reliqua omnia acida, diuerſae admodum indolis, produci poterunt, hoc vniuerſale dici nequit, quae demum probabilitatis argumenta reliquum praeſto ſint. Acidum nitri aëre puro vel dephlogiſticato et nitroſo componi D. *Lavoiſier* in Actis pariſ. 1776. demonſtrauit; aërem nitroſum antem re ipſa acidum nitri continere, vberiore quantitate phlogiſti obductum et inuolutum (monente celeb. *Maquer* in Diction. de Chymie Art. Gas nitreux) omnia euincunt experimenta; huc vſque igitur prima ſtamina acidi nitroſi omnino latent. Idem quoque de reliquis Acidis valet, quare identica cenſenda non ſunt.

(*a*) Geographia mineralog. Saxoniae, p. 380.

vero acidum proprii generis esse, ab aliis omnibus diuersum, satis ostendit D. *Scheele* in nouis actis holmiens. T. I. 1780. Acidum aëreum pro spiritu sulphuris volatili habet celeb. D. *Wallerius* in tractatu de origine mundi p. 42, 54, 56; proprietatibus vero et attractionibus admodum diuersis gaudet, vt comparatione instituta obseruat D. *Bergman* in opusculis, T. 3. p. 383, 384. Acidum phosphoreum in animalibus obuium putrefactione et ignis ope produci, contendit D. *Crobaré*, quem D[ni]. *Rouelle* et *Maquer* refutarunt. Notum est, veteres chemicos omne alkali, tam fixum quam volatile, ignis et putrefactionis productum credidisse, donec praeexistentia horum salium in corporibus, e quibus eliciuntur, a cel. *Margraf* aliisque recentiorum, satis superque fuerit demonstrata. Ita etiam fermentationis effectus, principia corporum, in illis antea dudum delitescentia, sed aliis obuoluta et occultata, in lucem protrahens, nouae productionis et transmutationis instar, a transpositione partium et calore oriundae, diu habitus est; sed haec commenta iam dies deleuit. Pudet vero memorare, hoc nostrum seculum, scientiarum cultura ceteroquin clarissimum, transmutationibus rerum imaginariis adeo patrocinari, vt ne absonae quidem veterum fabulae de generatione aequiuoca et origine minimorum saltem animalculorum a putrefactione quisquilium, nauseam moueant, sed sedulo potius regurgitentur, hinc inde asseclas inuenientes. Quo demum ruent solidioris doctrinae physicae fundamenta, tot tantisque eruditorum praestantissimorum lucubrationibus, labore ac sudore iacta, si tenebras barbari aeui, quibus expellendis ac profligandis secula vix suffecerunt, omni studio reuocamus miroque desiderio repetimus! Non quidem ad nostrum propositum

proprie

proprie ſpectant hae crepundiae auctorum, homunculos et germina rerum in aëre obuolitantia qui vident. In parentheſi igitur dicta ſunto, quae iam caſtigando monuimus. At metallorum ortus e vaporibus ſubterraneis, alkalium productio e rebus putridis aut combuſtis, ſalium terrarumque transmutationes continuae, noui nihil habent, nil quod miremur ſcilicet, ſi organica ipſa corpora e luto et aëre produci poſſunt.

§. 17. Terram calcaream cum ſale alkalino ſaepius fuſam in ſilicem abire D. *Mönch*, in diario chemico *Crelliano* P. 6ta p. 80. aſſeuerat. Quarzum verum eſſe tartarum vitriolatum, ab vnione acidi vitrioli et ſalis alkalini fixi (vegetabilis ſine dubio; nam alkali minerale cum acido vitrioli ſalem mirabilem conſtituit) natum, D. *Sage* in Mineralog. docim. P. I. p. 242, docet. Idem celeb. auctor (ibid. p. 202 etc) baſalten et adamantem acido phoſphoreo et alkali fixo componi affirmat. Notandum vero eſt, quod ſal alkalinus iſte nec e ſilice et quarzo, nec e baſalte et adamante extrahi poſſit. Idem quoque de acido vitriolico et phoſphoreo in his lapidibus affirmato valet. Videndum igitur eſt, an ſyntheſi forte confirmentur haec aſſerta, quamuis analyſis iis non faueat. Statim autem obſeruamus, tartarum vitriolatum toto coelo a quarzo differre, et acidum phoſphori cum ſale alkalino fixo combinatum, alkali phoſphoratum, nec vnquam baſalten aut adamantem producere. Ita etiam alkali fixum cum calce fuſum, ratione proportionis variatae, aut alkali cauſticum aut ſcorias vitreas, neutiquam vero ſilicem gignit.

§. 18.

§. 18. Magnesiam e calce viua et sale ammoniaco, terram siliceam e calce, acidis soluta, arte parari posse, in tractatu celeb. D. *Wallerii*, praeceptoris quondam dilectissimi, de origine mundi (p. 65 et 106. edit. suec.) traditur; ingenue autem fateri cogor, haec et alia eiusmodi tentamina transmutatoria, a me et aliis quoque amicis olim repetita, plane irrita fuisse, quando, vt decet, calcem, menstrua et reliqua adminicula, ab omni peregrino adhaerente libera et munda adhiberem.

§. 19. Terram argillaceam re ipsa esse siliceam, acido vitriolico intime vnitam, vir, in arte spagyrica experientissimus, D. *Baumé*, eleganti tractatu de argillis, multisque experimentis adstruere conatus est. Hac de re igitur nemo dubitare potuit, antequam repetitis a Dnis. *Meyero*, *Wieglebio*, *Scheele* et *Woulfe* iisdem experimentis, nouisque insuper adiectis, tandem patuit, errorem quendam vix ac ne vix quidem praesumendum, sub ipsa operatione irrepsisse, corrosionem nempe crucibuli non satis forsan cocti, terram aluminarem continentis, a sale alkalino factam. Mihi in Italia anno 1771 — 1772. commoranti, ad forum vulcani, Solfatara dictum, obseruare contigit, lauas vel scorias antiqui crateris et collium circumstantium, vaporibus calidis acidi sulphurei phlogisticati, vndique exhalantibus, dealbari, et tandem in terram, argillaceae indolis, resolui. Idem sane phoenomenon, minus tamen perspicuum, in plurimis aliis lauis Italiae antiquis, ad Viterbium etc. antea dudum obseruaueram, et experimentis Dni. *Baumé* fretus, de quibus dubitandi ansam nul-

iam prorſus haberem, cum correctiones a Dno. *Meyero*, *Wieglebio*, *Scheele* et *Woulfio* inſtitutae, aliquot annorum ſpatio tardius orbi erudito innotuerint, hanc lauae mutationem ita optime explicari poſſe credidi, vt vnioni intimae acidi ſulphurei cum terra ſilicea Lauae, ad mentem D. *Baumé* argillam producenti, adſcriberetur. Diſſolutiones quoque ſpontaneas ſaxorum granitoſorum et ſchiſtoſorum, argillam porrigentes, in Bohemia et alibi viſas, ſimili fere modo, acido cuidam, argilloſae ſubſtantiae petrae inhaerenti terramque ſiliceam quarzi corrodenti, tribuendas eſſe, tum exiſtimaui (*a*). Meliora iam edoctus, hunc meum errorem, vt decet, lubens agnoſco, et veritati bene cupiens dicam, quod res eſt. Scoriae vulcanorum, quae ab Italis nomine Lauae inſigniuntur, terram ſiliceam quidem continent; prout autem celeb. *Bergman* experimentis analyticis ſolide demonſtrauit (*b*), haec raro dimidium maſſae totius efficit. Reliquum terra argillacea, calcarea et ferro conſtat, quorum principiorum maximum pondus argilla praebet. Accedentibus iam vaporibus calidis acidi vitriolici phlogiſticati, ſcoriae hae eodem modo, quo ſericum vapori ſulphuris flagrantis expoſitum, ſenſim dealbantur et iniuriis aeris corroſae tandem fatiſcunt aut dilabuntur, terram argillaceam, copioſo ſiliceo et aliqua portione martiali et calcarea inquinatam, re-

(*a*) Ferbers Beiträge zur Mineralgeſchichte von Böhmen, S. 25 — 29.

(*b*) In opuſculis phyſico-chemicis, Vol. III. vbi de productis ignis ſubterranei agitur. Ante hoc examen Laua omnis, tota quanta ſilicea credebatur.

relinguentes, quae argillae albae communis ſpeciem prae ſe fert et alumini extrahendo, cum acidum vitrioli ſimul foueat et maiori eiusdem copia ſuper rimas fori vulcani ſtudioſe imbuatur, omnino idonea eſt. Quamuis itaque, vt dudum agnoui, in explicatione phoenomeni pauliſper titubauerim, obſeruatio tamen ipſa veriſſima eſt et memoratu digna. (*a*). Me quidem iudice parum refert, quis hoc vel illud naturae phoenomenon primus obſeruauerit, modo recte viderit, et vere deſcripſerit. Cum vero nobiliſſimo Do. *Hamilton*, Regis Angliae miniſtro neapolitano, placuerit, in campis ſuis phlegraeis me increpare, quod ſuam obſeruationem de reſolutione et dealbatione lauae mihi appropriauerim, nomen ſaltim inuentoris ſilendo, et haec eius vindicatio a nonnullis auctoribus, rei inſtar magni momenti repetatur, ab aliis vero dubitetur, an plagii cuiusdam ſuſpicio in me cadere poſſit; tandem his altercationibus finem imponere cogor, lubens taciturus, ſi non de re alius, ſed de re mea ſolum ageretur, vt per integros

(*a*) Diſſolutionem ſpontaneam granitis aliorumque lapidum quod attinet, qua argillam, in illis antea latentem, iam molliorem tamen in apricum ponunt; haec ſolis aëris iniuriis, absque vllo acido, perfici poteſt, vt recte obſeruauit D. *Gerhard* in libello, cui titulus: Beobachtungen und Muthmaſungen über den Granit und über den Gneiß, S. 16. An vero acidum aëreum, ſub fatiſcentia eiusmodi lapidum et ſaxorum in auras euolans, mechanicae huius diſſolutionis praecipua cauſſa et inſtrumentum ſit, vt in recentiore opere (Verſuch einer Geſchichte des Mineralreichs, 1r Theil, S. 64.) contendit idem auctor celeberrimus, nondum ſatis euictum eſt.

gros ſeptem annos (*a*) feci. Sciſcitantibus igitur reſpondeo, me inuentionis quandam gloriam huius detecti, ſi ita dici meretur, nulli mortalium eripere voluiſſe; epiſtolam tamen Dni. *Hamilton* eo tempore, cum literas ex Italia ſcriberem, nec legiſſe, quia typis vix euulgata erat (*b*) nec de ea quid audiuiſſe, ſed propriis omnino oculis meis ea vidiſſe, quae deſcripſi. Nimis quoque differt obſeruatio mea ab *Hamiltoniana*, quam vt vllo modo coincidant; contendit enim nobiliſſimus Eques, ſcorias vulcanicas ope acidi ſulphurei *calcinari* et ſenſim in *verum marmor* conuerti, quod nec vidi, nec ſcripſi, neque ſalua veritate concedere poſſum. In opere quodam *P. Minaſi*, cuius titulus iam memoria excidit, notatur, illam obſeruationem, de qua ambigitur, a D. *Vairo*, Profeſſore neapolitano, pri-

(*a*) Campi phlegraei D. *Hamilton* prodierunt anno 1776.

(*b*) Literae Nobiliſſimi D. *Hamilton*, de quibus agitur, datae ſunt Neapolis die 5ta Martii 1771. Meae, in quibus de Solfatara tractatur, d. 17 Februarii 1772. Iam vero, Acta Societatis R. ſcientiar. Londinenſis ad annum 1771, ſeu Voluminis 61 Pars Ima, vt titulus monſtrat, anno 1772 typis mandabatur; ante euulgationem igitur tomi, in quo continentur literae *Hamiltonianae*, ante aduentum huius tomi in metropoli neapolitana et aliis omnibus vrbibus, vbi officinae librariae reperiuntur, reditum in patriam meam dudum paraueram; phyſice itaque poſſibile haud fuit, vt *Hamiltonianas* literas legiſſem, cum meas *Bornio* meo ſcriberem. Ceterum, obſeruante D. *B. de Dietrich*, idem phoenomenon de quo agitur, longe antea forſan in aliis regionibus examinatum fuit (Iournal de Phyſique 1781. Iuillet p. 34 notte 11). Inuentionis igitur gloriam nulli mortalium inuideo; de veritate magis, quam de laude mea, ſolicitus. Sed in alienam meſſem falcem vt immittam, nec arrogantia, nec pauperie cogor.

primum fuiſſe inſtitutam (*a*), quod facile quidem fieri potuit, cum in vrbe his locis vicina diu vixerit, et res eius ſit indolis, vt cuique Solfataram ſemel adeunti, ſtatim in oculos cadat. Colles iſti, e laua nigra compoſiti, extus pluribus locis cretae albedine induuntur, adeo vt dudum circa initium aerae chriſtianae *leucogaei* dicerentur, et longa annorum ſerie e decrementis eorum alumen excoctum fuerit, agillaceam terram poſtulans. Quis igitur primus reſolutionem eorum in argillam, nec in calcem, animaduerterit, Dii ſciant, et noſtra ſane parum intereſt. Caueatur modo, ne ab hoc phoenomeno concludatur, terram ſiliceam, ſiue in calcaream, ſiue in argillaceam transmutari; ſi enim vera eſſet theoria D. *Baumé*, ne tunc quidem eiusmodi transmutatio hic locum haberet, quam nunquam ſane aſſumſi. Dixi tantum, argillam e terra ſilicea et acido vitriolico intime vnitis componi, prout ſelenites vel gipſum terra calcarea et eodem hoc acido conſtat, principiis Dni *Baumé* innixus; iam vero de hac vnione aliter ſentio.

§. 20. Alchemiſtarum de transmutationibus metallorum ſomnia, vetuſtate obſoleta, ſilentio premerem, niſi omni diligentia noſtris temporibus regurgitarentur et hinc inde aſſeclas inuenirent, mirum quantum credulos. Recenti memoria tenemus, quae anglorum Doctor *Price* orbi erudito nuper perſuadere voluit. Eius vero aſſerta, myſte-

(*a*) Videantur Conſiderations ſur les montagnes volcaniques, par Mr. *Collini*, p. 42. note o.

ſterii velo circumducta, nil prorſus probant; experimenta enim, quae non deſcripſit, repeti nequeunt, nec ergo monſtrari poteſt, an poſſibilitatem rei decidant, aut, quod magis probabile eſt, erroribus ſcateant, bono viro obreptis. Ceterum clariſſ. *Wiegleb* propria opella ſatis demonſtrauit, magnum opus, vti vocatur, ab Alchemicis valde expetitum, huc vsque ſaltem non fuiſſe perfectum. Terram aluminarem certa encheireſi quidpiam mercurii porrigere ſuſpicatus eſt celeb. *Scopoli*, quamuis longe alio fine experimentum ſuſceperit, quam vt aurum pararet; poſtea autem ab aliis tentatum non ſucceſſit. Reliqua omnia corpora adferre, e quibus metalla producere voluerunt auri ſacra fame eſurientes, ſuperuacaneus non modo, verum herculeus labor eſſet; vix enim vnicum ſupereſt, quod non igne variisque, ſaepe abſonis modis torſerint. Commiſcuntur a plerisque huius artis ſectatoribus materiae, inter ſe ſaepe incompatibiles aut contrariae, absque vllo propoſito; et quod certo affirmari poteſt, omnes eiusmodi praeſcriptiones, millenis libris alchemicis contentae, vbi myſticum ſenſum eruere licet, nunquam ſuccedunt, ſi tentantur. An natura arte polleat, metalla et reliqua mineralia transmutandi, nec ne, an in poſterum detegi queant adminicula, huic ſcopo ſufficientia, res eſt, de qua diſputando oleum et operam perdimus; eam enim abſolute ignoramus. Posſibilitatem quidem negare nolo; neſcimus enim quid naturae viribus congruat, vel repugnet, quamprimum de rebus occultis ſermo eſt. Ideo vero demonſtrata neutiquam eſt, et ſi eſſet, a poſſibilitate tamen ad exiſtentiam rei magnum reſtat ſpatium, non meris ſpeculationibus et fictis

tra-

traditionibus, ſed fidis experimentis implendum. Noua quotidie deteguntur metalla, quorum calces ſpecifice differunt et forſan acida peculiaria ſunt, parua portione inflammabili, ſulphuris inſtar, coagulata, id quod aliis enodandum relinquimus.

§. 21. Ex antecedentibus iam ſatis patet, nullo huc vsque argumento transmutationem quandam corporum mineralium, aut naturalem aut artificialem, fuiſſe probatam. Abſtineamus igitur ab omnibus eiusmodi hypotheſibus, ſcientiae parum proficuis, et chemica indagine indolem corporum eruere quaeramus. Eiusmodi vero experimenta inſtituendo ſumma vtamur circumſpectione, vt omnes vitentur errores, facile obrepentes, vbi nimia feſtinantia procedimus. Corpus examinandum purum ſit, nec aliud quam examinare velimus. Aqua deſtillata, menſtrua, vaſa, colatoria, charta filtratoria et reliqua adminicula ab omni peregrino munda ſint, ignis regimen congruum, menſtruorum iuſta craſis, i. e. dilutio vel ſpiſſitudo debita; quibus omnibus probe obſeruatis caueatur denique, ne concludendo fallacia quaedam committatur, eductum pro producto ſumatur, et quae ſunt reliqua. Hae regulae quanquam notiſſimae ſint et omnibus approbatae, non ſemper tamen obſeruantur aut effectui traduntur, vnde maximae oriuntur anomaliae et diſcrepantiae experimentorum et aſſertorum vix extricandae, quibus tandem variae opiniones de geneſi mineralium, per transmutationem quandam, ſuperſtrui ſolent. Quam arduum ſit opus, ſubtiliora experimenta rite inſtituendi omnesque vitandi ſcopulos veritatis indagini op-

po-

positos; quanta denique vniuersae naturae cognitione profundiore, attentione, patientia et dexteritate opus sit, vt metam feliciter attingamus, quando internam corporum indolem et ipsa stamina rerum eruere volumus, neminem fugit, qui ambitum huius scientiae sibi perspectum habet. Exigua sane momenta et minimae interdum circumstantiae sufficiunt, vt inscii ac inuiti a vero declinemus et erroribus implicemur. Nimis grauis est error, si corpora examinanda non rite cognoscimus, sed vnum alterius loco recipimus et de eo falso asserimus, quod hoc explorando eruimus. Accidentales quoque corporum naturalium immixtiones longe alium experimentorum euentum reddunt, quam si de puritate maxime solliciti fuissemus. Menstrua, praecipitantia, reagentia etc. minus pura aut heterogeneis particulis contaminata, producta vel educta statim alterant et illusionem faciunt. Acida mineralia e. g. vitriolicum pro diuerso praeparationis modo multum differre (vt parisiense *Holkeri* ab anglicano et saxonico) D. *Baumé* ostendit (*a*). Fieri quidem potest, vt experimenta, mineralisationem metallorum aliorumque quorundam fossilium, ope acidi salis factam, probatura, solam hanc ob caussam Dno. *Sage* aliter euenerint, quam reliquis chemicis, obseruante D. *Woulfe* in transactionibus philosophicis (*b*). Si iam acida

---

(*a*) Memoire sur la difference de l'acide vitriolique d'Angleterre & de celui des manufactures de France, lû à la séance publique du College de Pharmacie à Paris, 1781.

(*b*) Vol. LXVI. Parte 2. Artic. 43. vel in traductione germanica huius tractatus (Versuche über die innre Mischung einiger Mineralien von Peter Woulfe. Leipzig, 1778.) pag. 30 et 31.

acida mineralia, tentaminibus inferuitura, talia adhibentur, qualia in emporiis proftant, innumeri inde errores oriri poffunt. Charta bibula filtrationibus neceffaria, haud raro alumine inquinata deprehenditur, aqua deftillata feruida pluries eluendo, ne liquoribus colandis immifceatur. Puluis, particulae leuiores et vapores varii generis, in aëre atmofphaerico Laboratorii faepe obuolitantes, aut furnis, crucibulis etc. adhaerentes, fub labore corporibus aduenire poffunt eaque alterare, ita vt vix ac ne vix quidem fatis caute eiusmodi inquinamenta praecaueantur. Si praeuidiffet D. *Baumé*, crucibulum, in quo, liquoris filicum parandi cauffa, quarzum cum fale alkalino funderet, ab hoc fale corrofum iri, non fe et alios, inuitus quamuis, in errorem induxiffet, de quo fupra locuti fumus. Siliceam cruftam ab acido fluoris, vaporibus aquae vnito, gigni, e fuis experimentis verifimiliter conclufit D. *Scheele*; nouis autem a D. *Meyero* et auctore ipfo inftitutis patuit, vitri quidpiam acido fluoris folui et in altum rapi, quare fententiam fuam, quo par eft veritatis ftudio, mutauit. Si iam omni diligentia adhibita, vt euitentur eiusmodi errores, ipfi artis magiftri interdum tamen in illos incurrunt, quid de experimentis et conclufionibus eorum fentiendum eft, qui nimium feftinantes, vt multa fcribant, aut laboris impatientes, omnes has cautelas negligunt et vnico forfan leuiore tentamine acquiefcentes ftatim concludunt; aut non fufficiente cognitione inftructi, vel praeiudiciis occupati, fecus vident ac alii; ingenii lufu fupplentes, quod experimentorum penuria non docet? Quid de iis dicendum, qui transmutationes corporum vbique quaerendo, educta faepe

pro productis habent, veluti *Becchero* accidit, ferrum ab argilla et oleo Lini educenti, dum id arte productum vel transmutatione quadam ex his corporibus genitum crederet?

ASTRO-

ASTRONOMICA.

DE

INVENTIONE LONGITVDINIS LOCORVM EX OBSERVATA LVNAE DISTANTIA A QVADAM STELLA FIXA COGNITA.

Auctore

L. E V L E R O.

Problema Fundamentale.

Si alicubi obſeruata fuerit diſtantia Lunae a quapiam ſtella fixa, vna cum altitudine tam Lunae quam ſtellae fixae, inuenire eius diſtantiam veram geocentricam, quae ſcilicet eſſet apparitura ſpectatori in centro Terrae poſiti.

Solutio.

§. 1. Referat circulus H A B O horizontem, cuius Zenith ſit in Z, Luna autem tempore obſeruationis appareat in circuli verticalis Z L A puncto L, cuius altitudo ſuper horizonte ſit arcus A L $= a$, quae ſcilicet ſit altitu- Tab. VI. Fig. 1.

 do

do centri Lunae obſeruata; eius igitur diſtantia a Zenith erit arcus L Z $= 90° - a$. Eodem vero tempore ſtella fixa verſetur in circuli verticalis Z S B puncto S, cuius altitudo obſeruata ſit B S $= b$, ideoque eius diſtantia a Zenith Z S $= 90° - b$. Tertio vero obſeruata ſit diſtantia ſtellae S a centro Lunae L, ſiue arcus circuli magni L S, qui ſit L S $= d$, ita vt litterae a, b et d ſint quantitates per obſeruationes datae, vnde quaeri oportet diſtantiam, ſub qua ſtella a centro Lunae remota conſpiceretur ſpectatori in centro Terrae ſito.

§. 2. Primo igitur ob refractionem altitudines Lunae et ſtellae corrigi debebunt, qua fit vt ſidera nobis altiora appareant, quam ſi ex centro terrae ſpectarentur. Ex tabula igitur refractionum ſumantur refractiones tam altitudini a quam b reſpondentes, quae ſint α et β, ſicque ob refractionem altitudo Lunae ex centro terrae ſpectata erit $a - \alpha$; altitudo vero ſtellae $= b - \beta$, praeterea vero Luna ob parallaxin ex centro Terrae in maiori altitudine cerneretur, vnde altitudo ante correcta quapiam quantitate augeri debebit, quod incrementum pendet a parallaxi Lunae horizontali, quae illo tempore ſit $= \pi$, atque in Ephemeridibus ad quoduis tempus aſſignari ſolet, quae quia ſecundum coſinus altitudinis Lunae decreſcit, in puncto L erit effectus parallaxeos $= \pi$ coſ. a. Hoc ergo modo vera altitudo centri Lunae erit $= a - \alpha + \pi$ coſ. a et quia effectus parallaxeos ſemper maior eſt quam refractio, ſi ſtatuatur π coſ. $a - \alpha = \varepsilon$, vera altitudo centri Lunae erit $= a + \varepsilon$; ſtella vero ob immenſam diſtantiam nullam patitur parallaxin.

§. 3. His iam correctionibus adhibitis fit l verus Lunae locus, s autem verus ftellae locus, ita vt problema noftrum iubeat determinare arcum circuli maximi per puncta l et s ducti, quippe qui dabit veram diftantiam ftellae a centro Lunae ex centro terrae fpectandam, quae ponatur $ls = z$, quam ergo quomodo ex elementis cognitis, a, b, d et β et ε determinari oporteat, ex principiis Trigonometriae fphaericae erit oftendendum.

§. 4. Primo autem ex triangulo fphaerico L Z S quaeratur angulus L Z S, qui fi vocetur $= u$, erit

$$\text{cof.}\, u = \frac{\text{cof.}\, d - \text{fin.}\, a\, \text{fin.}\, b}{\text{cof.}\, a\, \text{cof.}\, b}.$$

Iam quia hic angulus inuariatus manet pro locis veris l et s, in triangulo fphaerico Zls praeter angulum u habentur latera

$$ZL = 90^\circ - a - \varepsilon \text{ et } Zs = 90^\circ - b + \beta$$

vnde colligitur

$$\text{cof.}\, z = \text{cof.}\, u\, \text{cof.}\, (a + \varepsilon)\, \text{cof.}\, (b - \beta)$$
$$+ \text{fin.}\, (a + \varepsilon)\, \text{fin.}\, (b - \beta)$$

hinc quia cof. u iam inuenimus, erit

$$\text{cof.}\, z = \frac{\text{cof.}\, (a+\varepsilon)\, \text{cof.}\, (b-\beta)\, (\text{cof.}\, d - \text{fin.}\, a\, \text{fin.}\, b)}{\text{cof.}\, a\, \text{cof.}\, b} + \text{fin.}\, (a+\varepsilon)\, \text{fin.}\, (b-\beta).$$

Quoniam vero valorem ipfius cof. u iam inuenimus, expediet forma priori vti, qua erat

$$\text{cof.}\, ls = \text{cof.}\, z = \text{cof.}\, u\, \text{cof.}\, (a+\varepsilon)\, \text{cof.}\, (b-\beta)$$
$$+ \text{fin.}\, (a+\varepsilon)\, \text{fin.}\, (b-\beta).$$

Exem-

Exemplum.

§. 5. Obſeruata ſit alicubi locorum diſtantia Lunae a quapiam ſtella fixa, ſeu arcus $LS = d = 38°, 45'$. Eodem autem tempore inuenta ſit altitudo Lunae $AL = a = 25°, 36'$, altitudo vero ſtellae $BS = b = 17°, 24'$, vnde determinari debeat vera diſtantia ex centro terrae viſa $ls = z$. Praeterea vero ex ephemeridibus conſtet Lunae parallaxis horizontalis $\pi = 59', 30''$.

Primo igitur ex tabula refractionum pro altitudine Lunae a reperitur refractio $\alpha = 2', 3''$, pro altitudine vero ſtellae b erit $\beta = 3', 4''$, tum vero ob $\pi = 59', 30'' = 3570''$ erit π coſ. $a = 3224 = 53', 44''$, hincque fit $\varepsilon = 51', 41''$, conſequenter habebimus

$$a + \varepsilon = 26°, 27', 41' \text{ et } b - \beta = 17°, 20', 56''.$$

§. 5. Nunc calculum pro inuentione anguli u apponamus:

$l$coſ. $d = 9,8920303$	lſin. $a = 9,6355699$	$l$coſ. $a = 9,9551259$
lDen. $= 9,9347837$	lſin. $b = 9,4757304$	$l$coſ. $b = 9,9796578$
9,9572466	ſumm. $= 9,1113003$	ſumm. $= 9,9347837$
	lDen. $= 9,9347837$	
	9,1765166	

I°. 0,906247
II°. 0,150147

coſ. $u = 0,756100$ et l coſ. $u = 9,8785792$.

§. 6.

§. 6. Inuento cof. u reliquus calculus ita adornetur:

$l\,\text{cof.}\,u = 9{,}8785792$	$l\,\text{fin.}(a+\varepsilon) = 9{,}6489398$
$l\,\text{cof.}(a+\varepsilon) = 9{,}9519370$	$l\,\text{fin.}(b-\beta) = 9{,}4744923$
$l\,\text{cof.}(b-\beta) = 9{,}9797790$	$9{,}1234321$
$9{,}8102952$	

I°. 0, 646094
II°. 0, 132871

cof. $z = 0{,}778965$ ergo $l\,\text{cof.}\,z = 9{,}8915179$

vnde fit $z = 38°, 50', 3''$, ficque vera diftantia Lunae ab hac ftella erat $38°, 50', 3''$, dum obferuata effet $d = 38°, 45'$, ita vt correctio hic addenda fit $5', 3''$.

Calculus
pro determinatione Longitudinis eius loci, vbi obferuatio exempli praecedentis eft facta.

§. 7. Primo hic tenendum eft, vbicunque haec obferuatio fuerit facta, tempus verum eius loci accurate obferuari debuiffe, vnde ex temporis aequatione colligatur tempus medium, quod fuerit Anno 1777. Aug. 22^d. 14^h. $35'$. Iam fumantur Ephemerides, pro meridiano fixo, puta Londinenfi, computatae, vnde pro meridie tam Aug. 22^d. quam Aug. 23^d. quaeratur diftantia Lunae ab eadem ftella, fueritque ad meridiem Aug. 22^d. ifta diftantia $= 32°, 57'$, at ad meridiem 23^d. Aug. fuerit ifta diftantia $= 46°, 27'$, atque ex hac duplici diftantia quaeratur tempus Londinenfe, quo ifta diftantia fuerit fupra inuentae aequalis. Videmus autem tempore 24^h. diftantiam Londini increuiffe

 quan-

quantitate 13°, 30′. Fiat ergo haec proportio: vt 13°, 30′: 24^h, ita exceſſus noſtrae diſtantiae ſupra minorem 5°, 53′, 3″ ad quartum 10^h, 27′, 38″, ita vt eadem diſtantia Londini debuerit reperiri Anno 1777. Aug. 22^d. 10^h, 27′, 38″. Quoniam igitur hoc momento tempus loci incogniti erat Aug. 22^d. 14^h, 35′, patet hunc locum orientaliorem fuiſſe Londino et differentiam meridianorum fuiſſe 4^h, 7′, 22″, ſiue in gradibus 61°, 50′, 30″.

§. 8. Quemadmodum ex Ephemeridibus pro quouis meridie diſtantia Lunae a certa ſtella fixa computari debeat, hac regula vti conueniet:

Ad meridiem propoſiti diei excerpatur longitudo Lunae $= L$ et latitudo Lunae $= l$, ſiquidem fuerit borealis, pro auſtralibus vero ſcribi deberet $-l$. Simili modo inde innoteſcet longitudo ſtellae $= S$ cum latitudine $= s$. Hinc ſi circulus ♈ Π ♎ deſignet eclipticam, cuius polus ſit in Π atque L et S ſint loca Lunae et ſtellae, per quae ducentur circuli Π L P et Π S Q, ob longitudinem Lunae $= L$ et ſtellae $= S$, erit arcus ♈ P $= L$ et arcus ♈ Q $= S$, tum vero ob latitudines erit $PL = l$ et $QS = s$, ex quibus fit arcus $PQ = S - L$, cui aequalis eſt angulus $L\Pi S = S - L$. Iam ducatur circulus maximus LS, et in triangulo LΠS cognoſcuntur latera $\Pi L = 90° - l$ et $\Pi S = 90° - s$, cum angulo intercepto $L\Pi S = S - L$. Hinc iam praecepta trigonometrica oſtendunt

Tab. VI. Fig. 2.

$$\text{coſ. } LS = \text{coſ. } (S - L) \text{ coſ. } l \text{ coſ. } s + \text{ſin. } l \text{ ſin. } s,$$

hocque modo obtinetur diſtantia ſtellae a Luna, ſeu arcus LS, iam ad centrum Terrae reductus. Parallaxis vero Lu-

Lunae hoc modo perpendi poteſt: Sit C centrum Terrae et O locus obſeruatoris, et ponatur radius Terrae C O $=1$; Luna autem reperiatur ad diſtantiam C ☽ $= n$, et ad C O ducatur normalis O ☽, ita vt hic luna in horizonte conſpiciatur; hoc modo erit angulus O ☽ C parallaxis Lunae horizontalis, quae ſit $= \pi$, eritque ſin. $\pi = \frac{1}{n}$, ideoque $n = \frac{1}{\text{ſin.}\,\pi}$. Nunc vero Luna verſetur in L, et ducta recta O L erit angulus ☽ O L altitudo Lunae $= \alpha$, ductaque porro recta C L $= n = \frac{1}{\text{ſin.}\,\pi}$ erit angulus O L C parallaxis conueniens, quam ponamus $= p$. Nunc in triangulo C O L habemus latus C O $= 1$ et latus C L $= n$, ac praeterea angulum C O L $= 90° + \alpha$. Hinc ergo erit ſin. $p : 1 =$ coſ. $\alpha : n$, vnde reperitur ſin. $p = \frac{\text{coſ.}\,\alpha}{n}$. Eſt vero $n = \frac{1}{\text{ſin.}\,\pi}$, vnde colligitur ſin. $p =$ coſ. α ſin. π. Quia autem hi anguli π et p vix vnquam vltra vnum gradum excreſcunt, loco ſinuum tuto ſumere licet ipſos angulos, ſicque erit $p = \pi$ coſ. α.

Tab. VI. Fig. 3.

DE ECLIPSIBVS SOLARIBVS IN SVPERFICIE TERRAE PER PROIECTIONEM REPRAESENTANDIS.

Auctore

L. EVLERO.

§. 1.

Tab. VII. Fig. 1.

Quo omnia, quae huc pertinent, dilucide explicemus atque ex primis principiis deriuemus, sint A et B centra globorum Solis et Lunae, et recta per haec puncta traducta transeat in C per centrum Terrae. Tum vero sint A *a* et B *b* radii Solis et Lunae, et ex Solis limbo superiore *a* iuxta Lunae limbum inferiorem *b* producatur recta *a b c*; similique modo iuxta Solis limbum inferiorem et Lunae superiorem agatur par recta *a b c*, quae rectae se mutuo in axis puncto V intersecent, quod si circumquaque fieri intelligatur, orietur conus, verticem suum habens in V, basin vero *c* C *c* per centrum Terrae transeuntem. Hunc conum eclipticum vocemus, quia vbique extra

extra eum ambo globi Solis et Lunae integri conſpiciuntur; intra vero Eclipſis Solis ſiue totalis ſiue partialis apparere debet. In confinio vero, hoc eſt in ſuperficie huius coni vbique Sol et Luna ſe inuicem tangere videbuntur.

§. 2. Ad hunc conum accurate determinandum vocetur radius globi ſolaris $A a = A$ et lunaris $B b = B$; porro vocentur diſtantiae centrorum A et B a centro Terrae $A C = a$ et $B C = b$. Praeterea vero ſit α ſemidiameter Solis ex C viſus, β autem ſemidiameter Lunae apparens, atque euidens eſt fore $\alpha = \frac{A}{a}$, ſimilique modo $\beta = \frac{B}{b}$, ſicque habebimus $A = a\alpha$ et $B = b\beta$. Tum vero ad verticem coni ecliptici V inueniendum ponamus $A V = x$ et $B V = y$, atque ſemiangulum coni verticalem $C V c = \omega$.

§. 3. Cum iam ſit interuallum $A B = a - b$, erit $x + y = a - b$; tum vero erit $A a : x = B b : y$, vnde ſit $\frac{A}{x} = \frac{B}{y}$, ideoque $\frac{a\alpha}{x} = \frac{b\beta}{y}$, qua aequatione cum illa $x + y = a - b$ coniuncta colligitur:

$$x = \frac{a\alpha(a-b)}{a\alpha + b\beta} \text{ et } y = \frac{b\beta(a-b)}{a\alpha + b\beta},$$

vnde porro fit

$$\text{ſin. } \omega = \frac{a\alpha}{x} = \frac{b\beta}{y} = \frac{a\alpha + b\beta}{a - b}, \text{ ſiue } \omega = \frac{a\alpha + b\beta}{a - b}.$$

Quia enim de Eclipſibus ſermo eſt, ſemper angulum ω cum ſuo ſinu confundere licet. Deinde vero cum ſit $C V = b + y = \frac{ab(\alpha + \beta)}{a\alpha + b\beta}$, per angulum ω multiplicando reperiemus radium baſeos $C c = \frac{ab(\alpha + \beta)}{a - b}$.

§. 4. Nunc, vti manifestum est, Spectatori in C posito ambo centra A et B congruere, at vero Spectatori in circumferentia baseos constituto ambo disci solaris et lunaris se tangere videbuntur, siue distantia centrorum apparens erit summa semidiametrorum apparentium $\alpha + \beta$, dum in ipso centro baseos haec distantia erat nulla; atque hinc pro quouis loco medio *m* distantia centrorum Solis et Lunae apparebit sub angulo $(\alpha + \beta) \frac{Cm}{Cc}$.

Tab. VII. Fig. 2. §. 5. Hactenus assumsimus tria puncta A B C in directum cadere; nunc autem consideremus casus, quibus recta A B producta extra C transit. Manentibus igitur A, B, C centris Solis, Lunae et Terrae, ac distantiis $CA = a$, $CB = b$, ponatur angulus $ACB = \gamma$, qui cum in Eclipsibus semper sit valde paruus, euidens est intervallum A B sensibiliter ab $a - b$ differre non posse; tum vero in rectam A B productam ex C demittatur perpendiculum C P atque mox patebit, distantiam B P a distantia $CB = b$ sensibiliter discrepare non posse. Quia enim distantia C A quasi est infinita, angulus C B P ab angulo $ACB = \gamma$ quam minime differet; vnde semidiameter baseos coni ecliptici erit $Pp = \frac{ab(\alpha + \beta)}{a - b}$.

§. 6. Habita autem distantiae Solis ratione ex A in C B productam demittatur perpendiculum A S, eritque

$AS = a \text{ sin.} \gamma$ et $CS = a \text{ cos.} \gamma$, vnde fit
$BS = a \text{ cos.} \gamma - b$.

Ex his autem colligitur tangens anguli A B S = tangenti anguli $CBP = \frac{a \text{ sin.} \gamma}{a \text{ cos.} \gamma - b}$, quae tangens etiam hoc modo

expri-

exprimi poteſt: tang. C B P $=$ tang. $\gamma\,(1 + \frac{b}{a\,cof.\,\gamma})$, qui ergo angulus, ob γ angulum valde paruum et $\frac{b}{a}$ fractionem minimam circiter $\frac{1}{400}$, ipſi γ proxime aequalis cenſeri poterit. Ad vſum autem ſequentem vocemus ſemidiametrum baſis coni ecliptici $Pp = p$, ita vt ſit $p = \frac{ab(\alpha + \beta)}{a - b}$; tum vero erit $CP = b$ ſin. C B P.

§. 7. Referamus nunc haec ad ſuperficiem Terrae, centro C, radio $Ca = Cd$ deſcriptam, quam rectae A C et B C traiiciant in punctis a et b, eritque angulus $aCb = \gamma$; tum vero ſit recta B P axis coni ecliptici, ita vt ſit $CP = b$ ſin. γ, ſiue accuratius Tab. VII. Fig. 3.

$$CP = b \text{ tang. } \gamma\,(1 + \tfrac{b}{a\,cof.\,\gamma});$$

tum vero radius coni erit

$$Pp = p = \frac{ab(\alpha + \beta)}{a - b}.$$

§. 8. Omnia nunc elementa, quae in hac figura occurrunt, accuratius perpendamus, atque ad inſtitutum noſtrum propius accommodemus. Ac primo quidem Terrae figuram tanquam perfecte ſphaericam aſſumamus, ne calculum in ipſo limine nimium difficultatibus obruamus; perfectis enim omnibus calculis pro hac hypotheſi, haud adeo difficile erit, etiam ad veram Terrae figuram reſpicere, ſiquidem correctiones hinc oriundae quam minimae ſint futurae. Hinc igitur omnes Terrae radios inter ſe aequales vnitate deſignemus; vnde ſi Parallaxin Solis horizontalem ponamus $= \sigma$, quam nouimus eſſe circiter $8,5''$, Lunae vero Parallaxin horizontalem $= \pi$, quia poſuimus diſtantiam Solis a Terra $= a$, Lunae vero $= b$ erit $a = \frac{1}{\sigma}$ et $b = \frac{1}{\pi}$.

§. 9.

§. 9. Deinde punctum a in figura designat locum in Terra, cui Sol verticaliter imminet, siue in cuius zenith centrum Solis existit; simili modo punctum b id est punctum in Terra, in cuius zenith centrum Lunae conspicitur. Haec ergo duo puncta ex tabulis Solis et Lunae, ad quoduis tempus, durante Eclipsi, computari oportet, id quod non difficulter fieri poterit, si primo ad verum tempus coniunctionis, tum vero ad quaedam momenta praecipua, tam ante quam post coniunctionem, haec duo loca sollicite determinentur. Inde igitur ad quoduis tempus durante Eclipsi angulus $a C b = \gamma$ innotescet, qui, vt deinceps videbimus, vltra 95 minuta prima increscere atque adeo summam amborum semidiametrorum apparentium Solis et Lunae, qui, ex centro Terrae visi, positi sunt α et β, haud mediocriter superare potest.

§. 10. Praeterea vero imprimis consideranda est positio axis coni ecliptici A B P (fig. 2.) in quem ex centro Terrae C perpendiculum C P demisimus, et qui radio C a tanquam perfecte parallelus spectari potest. Quia enim radius C a productus cum isto axe conuenit in centro Solis, eius directio non vltra Parallaxin Solis a directione C a declinare poterit, si quidem interuallum C P radium Terrae non multum superare potest, quoniam aliter conus eclipticus non in Terram incideret. Ob paruitatem ergo Parallaxis Solis istum axem radio C a parallelum spectare poterimus, vnde sequitur, punctum d, vbi recta C P superficiem Terrae traiicit, 90° a puncto a distare, quandoquidem angulus a C d, pro recto haberi potest, ita vt in hoc puncto d Hemisphaerium Terrae diurnum

urnum a nocturno separetur atque idcirco infra hoc punctum α nulla Eclipsis existere possit.

§. 11. Attendamus nunc etiam ad verticem coni ecliptici, qui in prima figura est in puncto V, a quo puncti P distantia aequalis est distantiae C P; ibi autem erat distantia $VC = \frac{ab(\alpha + \beta)}{\alpha a + b\beta}$, in qua formula si loco a et b scribamus $\frac{1}{\sigma}$ et $\frac{1}{\pi}$, erit distantia puncti P a vertice coni V $= \frac{\alpha + \beta}{\alpha\pi + \beta\sigma}$, ideoque, neglecta Solis Parallaxi σ, erit altitudo coni $PV = \frac{\alpha + \beta}{\alpha\pi}$. Deinde vero semiangulum verticalem huius coni, quem in prima figura posuimus $= \omega$, inuenimus $\sin.\,\omega = \frac{a\alpha + b\beta}{a - b}$, cui ipse angulus ω aequalis censeri potest, sicque erit $\omega = \frac{\alpha\pi + \beta\sigma}{\pi - \sigma}$, ideoque proxime $\omega = \pi$, qui angulus ductus in V P dabit semidiametrum basis coni ad punctum P, qui ergo erit

$$\frac{\alpha + \beta}{\pi - \sigma} = Pp.$$

§. 12. Haec ergo erit amplitudo coni ecliptici ad axis punctum P, quae autem sursum ascendendo continuo imminuitur, vnde in puncto quouis Q, posito interuallo $PQ = q$, semidiameter amplitudinis coni in Q se habebit ad Pp vt V Q ad V P. Quia ergo erat $VP = \frac{\alpha + \beta}{\alpha\pi + \beta\sigma}$, erit $VQ = VP - PQ = \frac{\alpha + \beta}{\alpha\pi + \beta\sigma} - q$, quod per angulum ω multiplicatum dabit semiamplitudinem in puncto q, quae erit $Qq = \frac{\alpha + \beta}{\pi - \sigma} - \frac{q(\alpha\pi + \beta\sigma)}{\pi - \sigma}$, quae diminutio, quia punctum Q vix vltra distantiam radii assumi potest, erit valde exigua. Sumto enim $q = 1$, erit

$$Qq = \frac{\alpha + \beta}{\pi - \sigma} - \frac{\alpha\pi - \beta\sigma}{\pi - \sigma},$$

 vbi

vbi diminutio, neglecto σ, valebit α, ideoque circiter parti radii ducentesimae aequari potest.

§. 13. Eclipsis igitur saltem in puncto P contingere potest tam diu, donec interuallum C p (sumto scilicet puncto p ipsi C propiore) radium Terrae $= 1$ superet. Cum igitur sit $CP = \frac{\gamma}{\pi}$, proxime, et $Pp = \frac{\alpha + \beta}{\pi}$, limes eclipticus erit, vbi sit $\frac{\gamma}{\pi} - \frac{\alpha + \beta}{\pi} = 1$, in quo ergo contingere incipiet Eclipsis horizontalis pro puncto Terrae d. Ex hac autem aequatione limes anguli γ, seu eius maximus valor, quo adhuc Eclipsis euenire potest, definitur, ita vt sit $\gamma = \pi + \alpha + \beta$; quamobrem, cum maxima Lunae Parallaxis horizontalis $\pi = 61', 45''$, maximus autem semidiameter Solis horizontalis $16', 19''$, Lunae vero $16', 47''$, erit maximus angulus $\gamma = 94', 51''$. Tum autem prodibit interuallum $CP = \frac{\gamma}{\pi} = \frac{95}{62}$, sicque ipso radio Terrae maius euadere potest, excessu existente $\frac{33}{62}$, qui ergo semissem radii Terrae aliquantum superat.

§. 14. Hinc igitur patet, in iis tantum coniunctionibus Solis et Lunae Eclipses contingere posse, quando distantia geocentrica centrorum Solis et Lunae, siue angulus $ACB = \gamma$ infra limitem $\alpha + \beta + \pi$ diminuitur, et Eclipsin tam diu durare, quamdiu angulus γ infra hunc limitem substiterit; initium autem et finem Eclipseos euenire, vbi fuerit $\gamma = \alpha + \beta + \pi$, atque adeo tam initium quam finem semper in ea Terrae loca incidere, vbi Sol in Horizonte conspicitur. Quamobrem si Eclipsin supra Horizontem incipere videmus, certi esse possumus, eandem Eclipsin iam ante in alio Terrae loco incepisse, vbi

vbi ſcilicet Sol in Horizonte apparuerit, quod idem de fine Eclipſeos eſt tenendum, ita vt primum initium ſemper in ortum Solis, finis autem poſtremus in occaſum incidat. Quod ad momenta intermedia attinet, Phaenomena Eclipſeos in ſequenti Problemate accuratius euoluamus.

Problema.

Quando circa coniunctionem Luminarium angulus $ACB = \gamma$ *minor deprehenditur quam* $\alpha + \beta + \pi$, *vbi* α *et* β *denotant ſemidiametros Solis et Lunae ex centro Terrae viſos,* π *autem Parallaxin Lunae horizontalem, inueſtigare, per quantum Terrae ſpatium Eclipſis extendatur et quanta futura ſit in ſingulis huius ſpatii punctis.*

Solutio.

§. 15. Cum igitur angulus $ACB = \gamma$ minor ſit quam $\alpha + \beta + \pi$, ponatur $\gamma = \alpha + \beta + \pi - \delta$, vnde ſi PV fuerit axis coni ecliptici, qui radio Ca parallelus cenſeri poteſt, erit interuallum $CP = \frac{\sin.\gamma}{\pi}$, ſiue ob γ angulum quam minimum erit $CP = \frac{\alpha + \beta + \pi - \delta}{\pi}$, ideoque interuallum $dP = \frac{\alpha + \gamma - \delta}{\pi}$, quod ſi eſſet $\frac{\alpha + \beta}{\pi}$, vti in ipſo Eclipſeos initio euenit, ex loco Terrae d diſtantia centrorum Solis et Lunae foret $= \alpha + \beta$. Nunc igitur tanto minor apparebit, quanto hoc ſpatium dP minus eſt quam $\frac{\alpha + \beta}{\pi}$: erit ergo diſtantia centrorum apparens $= \alpha + \beta - \delta$, quod adeo contingit in loco d, vbi Sol in Horizonte conſpicitur. Videamus iam qualis Eclipſis apparitura ſit in quouis alio Terrae loco z, ex quo ad pla-

Tab IV. Fig. 4.

num a C P, in quo exiſtunt centra Solis et Lunae cum centro Terrae, ducamus normalem $z y$, hincque etiam normalem $y x$ ad radium C a, quae producta axem coni ecliptici ſecet in t, ac vocemus iſtas coordinatas

$$Cx = x = pt;\ xy = y \text{ et } yz = z,$$

eritque, ob radium Terrae $= 1$, $xx + yy + zz = 1$. His poſitis erit interuallum $zt = \sqrt{zz + (p-y)^2}$, poſito ſcilicet breuitatis gratia C P $= p$, ita vt ſit $p = \frac{\alpha + \beta + \pi - \delta}{\pi}$, quae diſtantia, ſcil. zt, niſi minor fuerit quam radius coni ecliptici in puncto t, Eclipſis in loco z nulla obſeruabitur; ſin autem minor fuerit, etiam diſtantia centrorum Solis et Lunae, ex z viſa, tanto minor apparebit. Praeterea vero hoc tempore Sol a Zenith huius loci, ſiue a recta C z producta, diſtare videbitur angulo a C z, cuius ſinus erit $xz = \sqrt{(yy + zz)}$, coſinus vero C $x = x$, cuius ergo anguli complementum, ſiue angulus cuius ſinus eſt x, monſtrabit altitudinem Solis ſuper Horizonte.

§. 16. Supra autem vidimus, ſi in axe coni capiatur ſpatium P Q $= q$, ibi fore radium coni

$$\frac{\alpha + \beta}{\pi - \sigma} - \frac{(\alpha\pi + \beta\sigma)}{\pi - \sigma} q.$$

Negligendo igitur Parallaxin Solis σ, vtpote quam minimam, erit iſte radius $\frac{\alpha + \beta}{\pi} - \alpha q$; vnde patet, in puncto t, vbi P $t = x$, fore radium coni $= \frac{\alpha + \beta}{\pi} - \alpha x$, vbi quantitas αx iterum eſt tam exigua, vt in vſu practico negligi queat; interim tamen nihil impedit, quominus in calculo retineatur. Quamobrem ſi huic radio aequale ſtatuamus interuallum tz, tum z erit punctum, vbi diſtantia centrorum Solis et Lunae obſeruabitur ſummae ſemidiametrorum

rum $\alpha + \beta$ aequalis, vnde omnia haec puncta z monstrabunt in superficie Terrae limites spatii, in quo Eclipsis cernetur.

§. 17. Hinc igitur manifestum est, lineam curvam, in superficie Terrae per omnia haec puncta z transeuntem, includere spatium eclipticum, extra quod nulla prorsus dabitur Eclipsis. Aequatio igitur pro hac curua erit $\frac{\alpha + \beta}{\pi} - \alpha x = \sqrt{(zz + (p - y))^2}$. Hinc ergo, cum sit $zz = 1 - xx - yy$, hoc valore substituto habebimus aequationem inter x et y, qua proiectio istius curuae in planum Cad facta exprimitur, quae ergo erit

$$\left(\frac{\alpha + \beta}{\pi} - \alpha x\right)^2 = 1 + pp - xx - 2py,$$

haecque aequatio semper est ad Parabolam, solo casu excepto quo $p = 0$, siue axis coni in ipsum radium Ca incidit; tum enim ista aequatio erit

$$\left(\frac{\alpha + \beta}{\pi} - \alpha x\right)^2 = 1 - xx,$$

vnde x fit quantitas constans.

§. 18. Quod si iam loco radii coni integri eius quamlibet partem $\frac{m}{n}$ substituamus, curua nostra per omnia transibit puncta, vnde centrorum distantia $= \frac{m}{n}(\alpha + \beta)$ conspicitur, ideoque pro his locis aequatio erit

$$\frac{mm}{nn}\left(\frac{\alpha + \beta}{\pi} - \alpha x\right)^2 = 1 + pp - xx - 2py.$$

Ex quo sequitur, sumto $m = 0$, ea loca reperiri, vbi Eclipsis est centralis, seu distantia centrorum apparens nulla, quod ergo eueniet, vbi fuerit

$$1 - xx + pp - 2py = 0.$$

Et quoniam haec puncta in superficiem sphaericam cadere debent, necesse est vt coordinatae x et y sint radio 1 minores. Hinc igitur omnia Eclipseos Phaenomena in superficie Terrae assignare licebit.

§. 19. Cum neglecto termino αx, vtpote nullius momenti, et posito $\frac{\alpha + \beta}{\pi} = c$, aequatio pro Parabola inuenta sit

$$cc = 1 - xx + pp - 2py, \text{ erit}$$

$$x = \pm \sqrt{(1 + pp - cc - 2py)},$$

patet, ipsam rectam horizontalem C d esse axem huius Parabolae, eiusque verticem ibi fore, vbi $x = 0$, quod ergo euenit vbi $y = \frac{1 + pp - cc}{2p}$. In hac ergo a centro C distantia reperietur Parabolae vertex, qui sit in puncto F, secetque haec Parabola circulum in puncto H, vnde ad basin demittatur perpendiculum HG, ad quem locum H inueniendum erit CG $= y$ et HG $= x$, ideoque

Tab. VII. Fig. 5.

$$xx + yy = 1.$$

Quare cum hinc sit $xx = 1 - yy$, aequatio Parabolae erit $cc = (y - p)^2$, vnde sequitur $y = p \pm c$. Cognitis autem duobus punctis F et H, Parabola facile describitur, quam quaerimus. Tum autem spatium mixtilineum dFH erit proiectio spatii ecliptici in superficie Terrae, intra quod Eclipsis obseruatur.

§. 20. Quando Parabolae vertex F intra C d cadit, vt figura habet, vnica dabitur Parabolae cum circulo intersectio H, sicque spatium dHF in ipso Horizonte terminatur. Quando autem punctum F extra d cadit, vti in

in figura 6ª, quod euenit si fuerit

Tab. VII. Fig. 6.

$$\frac{1+pp-cc}{2p} > 1, \text{ siue } p-1 > c,$$

necessario duae dabuntur intersectiones H et h, pro quarum altera erit

$$CG = p + c \text{ et } Cg = c - p,$$

et nunc Spatium Terrae, respondens spatio Hh, intra circulum et Parabolam contentum, erit proiectio spatii ecliptici in superficie Terrae, quod Eclipsin patitur et quod propterea his casibus erit penitus determinatum, neque ad horizontem vsque porrigitur. Fieri autem potest vt Parabolae vertex F in infinitum elongetur, quod euenit vbi fit $p = 0$, sicque pro intersectionibus H et h erit $CG = Cg = c$, atque arcus Parabolae Hh erit linea recta.

§. 21. Contra autem vertex Parabolae non vltra certum limitem centrum C appropinguare potest. Cum enim sit $CF = \frac{1+pp-cc}{2p}$, eius valor minimus reperitur, vbi fit $pp = 1 - cc$, ideoque $p = \sqrt{(1-cc)}$; tum autem erit ista distantia minima $CF = \sqrt{(1-cc)}$, vnde cum propemodum sit $c = \frac{1}{2}$, ista minima distantia erit circiter $\frac{\sqrt{3}}{2}$. Neque vnquam ista distantia CF minor euadere potest. Tum autem erit interuallum

$$CG = c \pm \sqrt{(1-cc)},$$

vbi signum superius valere nequit, ita vt sit hoc casu

$$CG = c - \sqrt{(1-cc)},$$

quod ergo, casu $c = \frac{1}{2}$, erit $\frac{1-\sqrt{3}}{2}$, consequentur negatiuum, scilicet punctum G vltra centrum C cadit.

Alia

Alia Solutio Problematis.

§. 22. Poſtquam ad quoduis tempus, durante Eclipſi, ex Tabulis Aſtronomicis deſumti fuerint ſemidiametri horizontales Solis ac Lunae, qui ſint α et β, vna cum Parallaxi Lunae horizontali $= \pi$, (Solis enim Parallaxin tuto negligere licet) ſimulque angulus $a C b$, quo centra Solis et Lunae a ſe inuicem diſtare ſpectatori, in centro Terrae poſito, videbuntur, fuerit inuentus, qui ſit $= \gamma$, ex eo ſtatim innoteſcet punctum P in Horizonte, cui axis coni ecliptici perpendiculariter inſiſtit. Erit enim diſtantia $CP = p = \frac{\sin.\gamma}{\pi} = \frac{\gamma}{\pi}$, ob angulum γ ſatis exiguum, quia Eclipſis locum habere nequit, niſi hic angulus minor fuerit quam $\alpha + \beta + \pi$, vbi imprimis notandum eſt, iſtud punctum P ſemper in id planum incidere, quod per centra Solis, Lunae et Terrae tranſit.

§. 23. Quanquam autem iſte conus eclipticus verticem habet in V, puncto ſcilicet vltra Lunam ſito: tamen ille, ob iſtam diſtantiam maximam, circa regionem Terrae tuto pro cylindro haberi poteſt, cuius ergo radius erit $\frac{\alpha + \beta}{\pi} = c$; atque nunc manifeſtum eſt, baſin huius cylindri quae eſt circulus, centro P radio c in plano Horizontis deſcriptus, ſimul eſſe proiectionem ſpatii ecliptici in planum horizontis factam, vnde ex iſta proiectione omnia Eclipſis Phaenomena multo facilius deriuari poterunt, quam ex illa proiectione parabolica, in planum verticale facta, qua ante vſi ſumus.

§. 24.

§. 24. Repraesentet igitur circulus maior centro C descriptus sectionem Terrae horizontalem per centrum C factam, qua ergo Hemisphaerium diurnum a nocturno separatur, et consideremus primo casum, quo axis coni ecliptici extra hunc circulum in P incidit, cui ergo perpendiculariter insistere est censendus. Tum ex centro P radio $Pe = c$ describatur circulus minor, maiorem secans in punctio f et f, atque segmentum arcubus fdf et fef interceptum erit proiectio spatii ecliptici terrestris in planum horizontale facta. Illud scilicet spatium eclipticum perpendiculariter imminebit isti segmento.

Tab. VII. Fig. 7.

§. 25. Consideremus nunc etiam casum quo totus circulus minor intra maiorem cadit, cui ergo in superficie Terrae totum spatium, intra quod Eclipsis datur, perpendiculariter imminet, atque huius spatii perimeter per omnia ea Terrae loca transit, vbi Eclipsis vel incipit vel desinit, hoc est, vbi distantia centrorum Solis et Lunae summae semidiametrorum apparentium aequalis obseruatur, siue ambo disci se inuicem tangere videbuntur.

§. 26. Hinc igitur facile intelligitur, quomodo etiam ea loca in superficie Terrae definiri queant, vbi Eclipsis sub data quantitate conspicitur. Solent autem Astronomi quantitatem Eclipsium per digitos metiri, vbi duodecim digiti respondent casui, quo distantia centrorum Solis et Lunae penitus euanescit; tum vero, vbi distantia centrorum deprehenditur $\frac{11}{12}(\alpha + \beta)$, quantitas Eclipsis vnius digiti censetur; vbi distantia est $\frac{10}{12}(\alpha + \beta)$, dicitur

esse Eclipsis 2 digitorum et ita porro, veluti haec tabula ostendit:

Distantia.	Quant.	Distantia.	Quant.
$\frac{12}{12}(\alpha+\beta)$	0 dig.	$\frac{6}{12}(\alpha+\beta)$	6 dig.
$\frac{11}{12}(\alpha+\beta)$	1 —	$\frac{5}{12}(\alpha+\beta)$	7 —
$\frac{10}{12}(\alpha+\beta)$	2 —	$\frac{4}{12}(\alpha+\beta)$	8 —
$\frac{9}{12}(\alpha+\beta)$	3 —	$\frac{3}{12}(\alpha+\beta)$	9 —
$\frac{8}{12}(\alpha+\beta)$	4 —	$\frac{2}{12}(\alpha+\beta)$	10 —
$\frac{7}{12}(\alpha+\beta)$	5 —	$\frac{1}{12}(\alpha+\beta)$	11 —
		$\frac{0}{12}(\alpha+\beta)$	12 —

§. 27. Vt nunc isti diuersi gradus Eclipsium etiam in nostra figura repraesententur, nihil aliud opus est, nisi vt radius P e in duodecim partes aequales diuidatur, et centro P per singula diuisionum puncta circuli concentrici describantur. Nam vti extremus circulus respondet locis, vbi Eclipsis adhuc est nulla, ita hinc introrsum pergendo secundus circulus dabit loca, vbi Eclipsis est vnius digiti; tertius, vbi Eclipsis est duorum dig. et ita porro, vsque ad ipsum centrum P, quod respondet loco, vbi distantia centrorum Solis et Lunae est nulla; talis enim locus est vnicum punctum in superficie Terrae, per quod nimirum axis coni ecliptici transit.

§. 28. His expositis probe notandum est, dum ista inuestigatio successiue ad alios atque alios angulos γ applicatur, ob motum Coeli diurnum punctum a in superficie Terrae continuo locum suum mutare, vnde etiam pla-

planum horizontale ipſi reſpondens continuo immutabitur. Quamobrem, ſi haec Phaenomena per totam Eclipſeos moram in ſuperficie Globi terreſtris deſignare velimus, pro pluribus diuerſis momentis tales figurae deſcribi debebunt, ex quibus inter ſe collatis facile pro quouis Terrae loco iudicare licebit, num Eclipſis eo pertingat, ſimulque, ad quantam magnitudinem increſcere queat, atque inſuper omnia momenta Phaenomenorum innoteſcent.

ESSAI
SUR L'ORBITE ELLIPTIQUE
DE LA COMÈTE
DE 1763,

par

A. J. LEXELL.

§. 1.

Lorsque je communiquai à Mr. *Messier* les résultats de mes recherches sur l'orbite Elliptique de la Comète observée en 1773, ce célebre Astronome remarqua, qu'il y avoit quelque apparence de réussir à la détermination de l'orbite Elliptique pour la Comète observée en 1763, vû que la route apparente de cette Comète est très remarquable par sa courbure singuliere. Le 28 de Septembre 1763, qui est le jour au quel Mr. *Messier* la découvrit, son ascension droite fut estimée 243°. 40′ & sa Déclinaison Australe 4°. 42′. Le 19 d'Octobre Mr. *Messier* observa son ascension droite 222°. 1′ & sa Déclinaison Boréale 17°. 31′ à peu près. Enfin après que cet Astre eut traversé l'équateur de nouveau, il fut observé le 17 de Novembre par une Ascension droite de 215°. 26′ & une Déclinaison de 2°. 10′ Australe. Quoique cette cir-

circonſtance de la courbure de la route apparente, pût donner quelque eſpérance que la recherche de l'orbite Elliptique réuſſiroit; il y en avoit pourtant une autre qui fourniſſoit des éſperances mieux fondées, c'eſt que l'angle décrit par la Comète autour du Soleil pendant ſon apparition fut très conſidérable, & c'eſt cette circonſtance qui m'encouragea à entreprendre la recherche de l'orbite Elliptique. Depuis le 3 d'Octobre auquel jour Mr. *Meſſier* a commencé d'obſerver la Comète avec exactitude jusqu'au 24 de Novembre lorsqu'il l'a vue pour la dernière fois, l'angle décrit autour du Soleil ſurpaſſe 148° & même s'il étoit permis d'employer les lieux éſtimes de la Comète, du 28 & 29 Septembre, cet angle ſurpaſſeroit 154° ou 152°. Il y a de plus cette circonſtance avantageuſe pour la Comète de 1763, qu'on l'a obſervée non ſeulement vers les deux bouts de l'arc de ſon orbite, mais auſſi aſſez près de ſon paſſage par le Périhélie, en ſorte qu'ayant été vue dans des points bien différemment ſitués de ſon orbite, il n'eſt pas vraiſemblable qu'un orbe Parabolique puiſſe entierement ſatisfaire aux obſervations. Malgré toutes ces raiſons qui faiſoient préſumer que la recherche d'une orbite Elliptique réuſſiroit, les réſultats ont prouvé, que les obſervations faites vers la fin de l'apparition étoient beaucoup trop douteuſes, pourqu'on en pût tirer par rapport à l'excentricité de l'orbite, des concluſions qui s'approchaſſent tant ſoit peu de la verité. Cependant comme il eſt en même temps démontré par ces calculs, que la vraie orbite de la Comète s'éloigne aſſez d'une orbite Parabolique & que cette recherche peut ſervir à montrer, à quelle préciſion il faut pouſſer l'exactitude des obſervations, lorsqu'il s'agit de déterminer les

 or-

orbites Elliptiques des Comètes, je me flatte qu'un Exposé de mes calculs ne sera pas désagréable aux Astronomes; vû que si je n'ai pas réussi à trouver ce que je m'étois proposé de chercher, j'ai au moins eu la satisfaction de prouver, qu'il n'est pas possible de réussir à cette recherche d'après les observations qu'on a faites.

§. 2. Je ne m'arreterai pas à donner la description de la Méthode dont j'ai fait usage dans mes calculs, parceque c'est la même que Mr. *Euler* a proposée dans ses recherches sur la Comète de 1769, & que j'ai aussi employé pour les Comètes de 1770 & 1773 (voyez les Actes de l'Académie de Pétersbourg pour les Années 1777, 1779,) mais je me réserverai pourtant de proposer de temps en temps quelques remarques rélatives à l'usage de cette Méthode pour le cas présent. Dans la Méthode de Mr. *Euler* on suppose à peu près connus les deux Elémens de l'orbite de la Comète par lesquels la position du plan, dans lequel elle se meut est déterminée: savoir la Longitude du Noeud & l'inclinaison de l'orbite; pour n'être pas embarassé à chercher des valeurs convenables pour ces Elémens, j'ai cru devoir profiter des calculs de Mr. *Pingré*, en employant dans les calculs préliminaires les Elémens que ce savant Astronome a proposés pour l'orbite Parabolique, savoir la Longitude du Noeud $11^s. 26°. 29'$ & l'inclinaison de l'orbite $73°. 39'$. Les observations que j'ai choisies pour la détermination de l'orbite Elliptique, sont celles que Mr. *Messier* a faites le 3 d'Octobre, le 26 d'Octobre & le 17 de Novembre; parceque j'ai soupçonné que les observations antérieures à celle du 3 d'Octobre pourroient être moins exactes, & que celle du

du 24 de Novembre m'a paru un peu ſuſpecte, Mr. *Meſſier* étant obligé d'avouer, que ce n'eſt qu'avec la plus grande difficulté, qu'il a vu la Comète ce jour-là. Par les obſervations mentionnées on a:

Temps vrai de Paris.	Long. de la Com.	Latit. de la Comète
1763 Oct. 3. $7^h.26'.48''$	$7^s.21^\circ.37'.24''$	$27^\circ.38'.50''$ Bor.
26. 6. 59. 24	5. 20. 14	31. 44. 0
Nov. 17. 17. 4. 12	2. 41. 32	16. 26. 34

§. 3. Les trois Hypotheſes que j'ai d'abord employées pour le calcul de l'orbite Elliptique ſont celles-ci:

Longitude du Noeud	$11^s.26^\circ.30'$;	$11^s.26^\circ.40'$;	$11^s.26^\circ.30'$;
Inclinaiſon de l'orbite	73. 40;	73. 40;	73. 30;

Ayant excecuté pour ces Elémens les calculs preſcrits dans la Méthode de Mr. *Euler*, j'ai trouvé pour les trois obſervations, le temps du Périhélie exprimé comme il ſuit:

Temps du Périhélie exprimé en temps moyen de Paris.

1763 Novemb.	I. Hypot.	II. Hyp.	III. Hyp.
I. Obſervation	1, 7769	1, 7422	1, 7750
II. Obſervation	1, 5170	1, 4989	1, 4643
III. Obſervation	1, 3346	1, 2798	1, 2583

On aura donc en général pour le temps du Périhélie ces expreſſions:

$$1,7769 - 0,0347.x - 0,0019y;$$

$$1,5170 - 0,0181.x - 0,0527y;$$

$$1,3346 - 0,0548.x - 0,0763y;$$

où

où les coefficiens de x et y ſont exprimés en parties de dix Minutes. Par ces trois expreſſions on a les deux équations que voici:

$$0,2599 - 0,0166.x + 0,0508.y = 0;$$

$$0,4423 + 0,0201.x + 0,0744.y = 0;$$

& de là on conclut $y = -5,57$ et $x = -1,39$, c'eſt à dire $y = -55'.40''$ et $x = -13'.50''$ à peu près. Car quoique ces deux valeurs de x & y ne puiſſent être parfaitement exactes, vû que les coefficiens de x et y dans les équations propoſées ne ſont pas aſſez ſcrupuleuſement déterminés, il nous ſuffit qu'au moyen de ce calcul préparatif nous nous ſoyons un peu rapprochés des vraies valeurs de la Longitude du Noeud & de l'inclinaiſon de l'orbite, comme on verra par le détail des calculs ſuivants.

§. 4. Les trois ſuppoſitions dont j'ai enſuite fait uſage ſont celles-ci:

Lieu du Noeud	$11^s.26°.22'.54''$;	$11^s.26°.32'.54''$;	$11^s.26°.22'.54''$
Incl. de l'orbite	$72°.45'.0''$;	$72°.45'.0''$;	$72°.55'.0''$,

& ayant fait le calcul pour le temps du Périhélie déterminé par les trois obſervations, je ſuis parvenu à ces expreſſions:

$$1,8520 - 0,0345.x - 0,0044.y;$$

$$1,8115 - 0,0168.x - 0,0505.y;$$

$$1,7726 - 0,0533.x - 0,0728.y;$$

des quelles on tire ces deux équations:

$$0,0405 - 0,0177.x + 0,0461.y = 0;$$

$$0,0794 + 0,0182.x + 0,0684.y = 0;$$

D'où

d'où l'on tire $y = -1,042$, $x = -0,431$; c'est à dire $y = -10'. 25''$; $x = -4'. 18''$, les coefficiens de x & y étant exprimés en parties de dix Minutes. De là il faut conclure; que la Longitude du Noeud est $11^s. 26°. 18'. 36''$, & l'inclinaison de l'orbite $72°. 34'. 36''$, au moins à peu de chose près. Pour approcher encore d'avantage des vraies valeurs, j'ai formé ces trois Hypothèses:

Lieu du Noeud	$11^s.26°.17'.54''$;	$11^s.26°.22'.54''$;	$11^s.26°.22'.54''$
Incl. de l'orbite	$72. 35. 0$;	$72. 35. 0$;	$72. 45. 0$;

lesquelles fournissent pour le temps du Périhélie ces trois expressions;

$$1,8784 - 0,0362 . x - 0,0083 . y;$$
$$1,8738 - 0,0188 . x - 0,0533 . y;$$
$$1,8701 - 0,0524 . x - 0,0713 . y;$$

& de là on tire ces deux équations:

$$0,0046 - 0,0174 . x + 0,0450 . y = 0;$$
$$0,0083 + 0,0162 . x + 0,0630 . y = 0;$$

ce qui fournit $y = 0,11995$; $x = -0,0458$, ou $y = -1'. 12''$; $x = -20''$; les coefficiens de x et y étant toujours exprimés en parties de dix Minutes. Par là on conclut la Longitude du Noeud $11^s. 26°. 17'. 26''$ et l'inclinaison de l'orbite $72°. 33'. 48''$.

§. 5. Les valeurs trouvées en dernier lieu pour la Longitude du Noeud & l'inclinaison de l'orbite devroient certainement être fort exactes, s'il étoit permis de supposer, que les variations pour le temps du Périhélie soient proportionelles aux changements dans les hypothèses employées pour la Longitude du Noeud & l'incli-

naison

naiſon de l'orbite; mais l'experience prouvant aſſez qu'une telle ſuppoſition ne ſauroit être admiſſible, que pour de fort petites variations dans les deux Elémens en queſtion; il m'a falu encore choiſir des ſuppoſitions plus approchantes de la verité, comme celle-ci par exemple:

Longitude du Noeud 11^s. 26°. 17'. 28'';
Inclinaiſon de l'orbite 72. 34. 0;

la quelle m'a fourni ces trois expreſſions pour le temps du Périhélie: 1763 Tems moy. de Paris, Nou. 1,8782, 1,8790, 1,8801; & ſi l'on y applique les corrections exprimées en x et y comme ci-deſſus, on trouvera $y = + 0,0250$; $x = + 0,0187$; c'eſt à dire $y = + 15''$ et $x = + 11''$. Or quoique j'aye repété le calcul pour les deux Hypothèſes:

Longitude du Noeud	11^s. 26°. 17'. 28'';	11^s. 26°. 17'. 28'';
Inclinaiſon de l'orbite	72. 34. 15;	72. 33. 45;

& que les réſultats ſe ſoient accordés fort bien enſemble, j'ai pourtant trouvé à ma grande ſurpriſe, que ces trois ſuppoſitions menoient à différentes valeurs principalement pour l'inclinaiſon de l'orbite, ce qui ne devoit certainement pas être, ſi le calcul étoit fait avec aſſez d'exactitude. Ayant réfléchi ſur cette circonſtance, j'ai remarqué qu'il faloit faire le calcul des angles avec plus d'exactitude, que je n'avois fait d'abord & que pour la mitoyenne obſervation on devroit pouſſer cette exactitude jusqu'à des centiemes parties des ſecondes. Ayant donc à la fin choiſi cette Hypothèſe.

Longitude du Noeud 11^s. 26°. 17'. 38'';
Inclinaiſon de l'orbite 72. 34. 10;

j'ai

j'ai trouvé par le plus juſte calcul pour le temps du Périhélie ces trois expreſſions: 1, 8779, 1, 8780, 1, 8780, qui s'accordent auſſi bien qu'on peut le ſouhaiter. Cependant ſi à ces trois valeurs on applique les corrections exprimées en x et y comme ci-deſſus, on trouve $y = + 1'', 1$ et $x = - 0'', 06$; mais comme cette correction pour y eſt fort petite, celle de x étant presque nulle, j'ai cru qu'il valoit mieux s'en tenir aux Elémens trouvés. Nous aurons donc pour l'orbite Elliptique qui ſatisfait aux trois obſervations du 3 d'Octobre, du 26 d'Octobre & du 17 de Novembre, les Elémens ſuiuants:

I. Longitude du Noeud	11^s. 26°. 17'. 38'';
II. Inclinaiſon de l'orbite	72. 34. 10;
III. Elongation du Périhélie au Noeud	88. 39. 48, 8;
IV. Log. du Demi-paramètre	9, 9975304,
Demi-paramètre	0, 9943298;
V. Log. de l'Excentricité	9, 9980093,
Excentricité	0, 9954268;

VI. Temps du Périhélie en temps moyen de Paris,
1763. Novembre 1, 8780,

ou le 1 de Novembre à 21^h. 4'. 19'' à peu près. De là on conclut le demi-axe principal de l'orbite 108, 4113 & le temps Périodique 1137, 4 Ans, ou 1137 Ans 5 Mois à peu près.

§. 6. Afin qu'on ſoit en état d'apprécier la confiance que ces Elémens méritent je vais expoſer une comparaiſon des Longitudes & Latitudes obſervées, avec celles qu'on tire du calcul d'après les Elémens:

Temps vrai de Paris 1763.	Long. de la Comète observée.	Long. Calcul.	Latit. de la Comète observée.	Latit. Calcul.
Oct. 3. 7h. 26′. 48″	7s.21°. 37′. 24″	+ 3″	27°. 38′. 50″	B — 1″
4. 6. 53. 14	20. 17. 5	— 13	28. 46. 8	+2′. 18
7. 6. 56. 48	16. 54. 41	+ 10	31. 16. 19	+2. 50
9. 7. 17. 21	15. 8. 50	—1′. 0	33. 20. 53	+1. 37
10. 7. 1. 39	14. 20. 27	+1. 10	32. 44. 20	+ 39
11. 7. 26. 36	13. 35. 32	—3. 53	33. 4. 55	+ 47
13. 6. 58. 48	12. 13. 36	— 52	33. 31. 31	+ 12
14. 7. 12. 44	11. 32. 48	— 42	33. 40. 22	— 4
15. 6. 49. 48	10. 56. 1	+ 31	33. 45. 10	+ 0
16. 6. 41. 16	10. 20. 25	+ 42	33. 47. 51	— 54
17. 6. 36. 41	9. 45. 27	+ 25	33. 46. 37	+ 16
19. 6. 26. 18	8. 39. 5	+ 41	33. 37. 44	+ 0
20. 6. 31. 47	8. 7. 51	— 11	33. 29. 46	—1. 47
21. 6. 24. 33	7. 37. 49	— 23	33. 17. 49	+ 10
22. 6. 19. 25	7. 8. 25	— 31	33. 4. 26	— 1
23. 6. 20. 2	6. 39. 58	— 29	32. 48. 9	— 1
24. 6. 8. 29	6. 12. 35	— 16	32. 30. 20	— 44
25. 6. 42. 12	5. 46. 16	— 9	32. 9. 3	—1′. 7
26. 6. 59. 24	5. 20. 14	+ 0	31. 44. 0	— 1
Novemb.				
11. 17. 39. 56	2. 14. 56	—1′. 32	21. 4. 54	—2. 24
13. 17. 31. 25	2. 20. 12	—1. 36	19. 23. 14	+6. 49
14. 17. 35. 37	2. 23. 27	— 32	18. 37. 44	+5. 46
15. 17. 32. 48	2. 30. 17	—2. 25	17. 52. 17	+5. 17
17. 17. 4. 12	2. 41. 32	+ 0	16. 26. 34	+ 1
24. 18. 17. 25	3. 52. 26	—3. 27	11. 18. 56	—4. 17

Les

Les obſervations antérieures à celle du 3 d'Octobre ne méritent pas d'être miſes en compte, car les lieux de la Comète étant déterminés par eſtime, on ne doit pas être ſurpris d'y trouver des erreurs aſſez groſſières. Au reſte il paroît par la comparaiſon propoſée que la première obſervation employée dans notre calcul doit être cenſée aſſez exacte par rapport à la Longitude, mais que quant à la Latitude elle admet peut-être une diminution d'une ou de deux Minutes. Pour l'obſervation intermédiaire ou celle du 26 d'Octobre elle paroît être bien exacte, ſoit par rapport à la Longitude où a la Latitude & les plus grandes erreurs, qu'on y pourroit ſuppoſer ne ſurpaſſeront pas une demi-Minute. Enfin rélativemant à la dernière obſervation employée dans le calcul, qui eſt celle du 17 de Novbr., on eſt beaucoup plus incertain & pour juger d'après les autres obſervations faites dans ce mois de Novembre, l'obſervation du 17 de Nov. doit admettre une correction additive en Longitude de 2 Minutes, & une correction ſouſtractive en Latitude de 4 à 5 Minutes; cependant par rapport à cette dernière correction les obſervations de 11 & du 24 de Novembre ne s'accordent pas avec le reſte des obſervations. Mais comme Mr. *Meſſier* a obſervé la Comète avec une extrême difficulté vers le dernier temps de ſon apparition à cauſe de la foibleſſe de ſa lumière; c'eſt à regrèt, que je ſuis obligé d'avouer que l'incertitude de ces obſervations rend presque toute recherche ſur l'orbite Elliptique infructueuſe.

§. 7. L'Excentricité de l'orbite trouvée ci-deſſus n'étant que fort peu differénte de l'unité, il n'eſt pas même vraiſemblable qu'on eut pu obtenir dans les obſervations

 une

une exactitude assez scrupuleuse pour la déterminer aussi sûrement qu'on le souhaiteroit. Cependant afin qu'on puisse juger comment les erreurs des observations changent les Elémens que je viens de trouver, il m'a paru convenable de faire quelques suppositions vraisemblables pour les corrections des observations & de calculer ensuite conformément à ces corrections les Elémens de l'orbite Elliptique. Supposant donc en *premier lieu* que dans l'observation faite le 3 d'Octobre, il y ait pour la Longitude une correction d'une Minute additive & faisant usage de cette Hypothèse:

Longitude du Noeud. $11^s. 26^\circ. 18'. 0''$;
Inclinaison de l'orbite $72^\circ. 34'. 0''$;

on parvient à ces expressions pour le temps du Périhélie:

Novembr. 1, 8793; 1, 8783; 1, 8782;

& si l'on y applique les corrections de x et y, comme ci-dessus (ce qu'il est permis de faire, sans s'exposer à des erreurs trop grossières) on aura ces expressions générales pour le temps du Périhélie:

$$1,8793 - 0,0362.x - 0,0083.y;$$
$$1,8783 - 0,0188.x - 0,0533.y;$$
$$1,8782 - 0,0524.x - 0,0713.y;$$

ce qui donne $y = -11'',6$; $x = +7'',1$. Ensuite en employant la Longitude du Noeud $11^s. 26^\circ. 18'. 0''$, & l'inclinaison de l'orbite $72^\circ. 33'. 30''$, les expressions pour le temps du Périhélie seront 1, 8796; 1, 8808; 1, 8817; d'où moyennant les corrections pour x et y comme ci-dessus, on trouve $y = +18'',4$; $x = 6'',2$; en sorte que ces deux calculs servent à vérifier l'un l'autre. Enfin par la Longitude du Noeud $11^s. 26^\circ. 18'. 6''$, et l'inclinaison

naiſon de l'orbite 72°. 33'. 50'', les expreſſions pour le temps du Périhélie ſeront: 1,87888; 1,87890; 1,87885; & comme ces trois valeurs s'accordent aſſez bien, il ne vaut pas la peine de pouſſer l'exactitude plus loin. De là s'enſuit donc que les Elémens de l'orbite Elliptique ſeront:

I.	Longitude du Noeud	11ˢ. 26°. 18'. 6'';
II.	Inclinaiſon de l'orbite	72. 33. 50;
III.	Elongation du Périhélie au Noeud	88. 39. 34, 3;
IV.	Logar. du Demi-paramètre	9, 9976140;
V.	Logar. de l'Excentricité	9, 9982134;
IV.	Temps du paſſage par le Périhél. Nov.	1, 87688.

Par là on conclut le temps Périodique 1337, 2 Ans.; c'eſt à dire presque de deux cent Ans plus grande que ſi l'obſervation du 3 d'Octobre étoit ſuppoſée tout à fait exacte par rapport à la Longitude. Quelques petits donc que ſoient les changements dans les autres Elémens de l'orbite, on voit au moins qu'une fort petite erreur dans la Longitude obſervée le 3 d'Octobre, produiroit des changements aſſez ſenſibles dans le temps Périodique.

§. 8. Suppoſons en *ſecond lieu* que l'obſervation du 3 d'Octobre ſoit exacte par rapport à la Longitude, mais que pour la Latitude, il y ait une correction d'une Minute à ajouter; ſi l'on ſuppoſe la Longitude du Noeud 11ˢ. 26°. 17'. 20'', et l'inclinaiſon de l'orbite 72°. 34'. 40'', les expreſſions pour le temps du Périhélie ſeront: 1,87595; 1,87594; 1,87783; d'où moyennant les corrections exprimées en x, y, on trouve

$$y = + 11'', 3 \text{ et } x = + 28'', 3.$$

En-

Enſuite ſuppoſant la Longitude du Noeud 11ˢ. 26°. 17′. 48″. & l'inclinaiſon de l'orbite 72°. 34′. 40″, les expreſſions pour le temps du Périhélie ſont: 1, 87429; 1, 87513; 1, 87524; d'où il ſuit $y = + 9'', 9$; $x = - 3'', 3$. Enfin par la Longitude du Noeud 11ˢ. 26°. 17′. 48″, & l'inclinaiſon de l'orbite 72°. 34′. 50″, les valeurs pour le temps du Périhélie ſeront: 1, 87425; 1, 87427; 1, 87413; par là en employant les corrections en x et y, on obtient $y = - 0'', 5$, $x = - 2'', 2$. Par conſequent ſans s'expoſer à des erreurs trop conſidérables, on pourra employer ces Elémens:

I. Longitude du Noeud	11ˢ. 26°. 17′. 48″;
II. Inclinaiſon de l'orbite	72. 34. 50;
III. Elongation du Périhélie au Noeud	88. 39. 33, 8;
IV. Logar. du Demi-paramètre	9, 9976227;
V. Logar. de l'Excentricité	9, 9981530;
VI. Temps du Périhélie Novembr.	1, 87425;

& enfin le temps Périodique 1272, 4 Ans, ou 140 Ans, de plus que pour le cas, où l'obſervation du 3 d'Octobre eſt ſuppoſée exacte. Or comme il eſt plus vraiſemblable que la correction de la Latitude pour cette obſervation ſoit negative, ou que la Latitude doive être diminuée, ſuppoſons que cette diminution ſoit d'une Minute; alors il eſt permis de ſuppoſer que les valeurs pour le demi-paramètre & l'excentricité différeront autant de celles que l'Hypothèſe principale fournit, que ces dernières ſont ſurpaſſées par les Elémens qui ont lieu lorsque la correction de la Latitude eſt ſuppoſée poſitive & d'une Minute. Nous aurons donc le Logar. du Demi-paramètre

9, 997-

9, 9974381, & celui de l'Excentricité = 9, 9978656, par conſequent le temps Périodique 1024, 7 Ans. Enfin ſi l'on ſuppoſe que la correction en Latitude ſoit ſouſtractive & de deux Minutes, il y aura

Logar. du Demi-paramètre = 9, 9973358,
Logar. de l'Excentricité = 9, 9977219,

& le temps Périodique 929, 3 Ans.

§. 9. Si l'on ſuppoſe pour la ſeconde obſervation qui a été faite le 26 d'Octobre, une correction en Longitude d'une Minute additive & qu'on employe pour la recherche des Elémens cette Hypothèſe:

Longitude du Noeud $11^s.\ 26^\circ.\ 15'.\ 0''$;
Inclinaiſon de l'orbite $72^\circ.\ 36'.\ 20''$;

les expreſſions pour le temps du Périhélie ſeront:

1, 87788; 1, 87786; 1, 87735,

d'ou moyennant les corrections pour x, y, on tire

$y = +\ 2'', 6$; $x = +\ 7'', 3$.

Enſuite ſuppoſant la Longitude du Noeud $11^s.\ 16^\circ.\ 15'.\ 7''$ et l'inclinaiſon de l'orbite $72^\circ.\ 36'.\ 20''$, les expreſſions pour le temps du Périhélie ſont: 1, 87731; 1, 87762; 1, 87769; de là réſulte $y = +\ 3'', 8$; $x = 0'', 6$. Enfin par la Longitude du Noeud $11^s.\ 26^\circ.\ 15'.\ 7''$; l'inclinaiſon de l'orbite $72^\circ.\ 36'.\ 23''$ les expreſſions pour le temps du Périhélie ſeront: 1, 87729; 1, 87737; 1, 87738; d'où

$y = +\ 0'', 96$; $x = -\ 0'', 3$.

Par cette raiſon on peut employer ces Elémens:

I. Longitude du Noeud - - $11^s, 26°. 15'. 7''$;
II. Inclinaiſon de l'orbite - - 72. 36. 24;
III. Elongation du Périhélie au Noeud 88. 41. 5, 5;
IV. Logar. du Demi-Paramètre - 9, 9973027;
V. Logar. de l'Excentricité - - 9, 9974226;
VI. Temps du Périhélie Novembre 1, 87728 & enfin le temps Périodique 782 Ans.

Or comme ſelon toutes les apparences, la correction de cette obſervation quoique poſitive, ne ſera pas tout à fait d'une Minute entiere, nous la ſuppoſerons d'une Demi-Minute, d'où on aura le Logar. du demi-Paramètre 9, 9974528, le Logar. de l'Excentricité 9, 9977259 & le temps Périodique 931, 4 Ans.

§. 10. Suppoſant enſuite que la Longitude de la Comète obſervée le 26 d'Octobre ſoit exacte, mais que pour la Latitude il s'y trouve une correction d'une Minute à ſouſtraire; en employant d'abord la Longitude du Noeud $11^s. 26°. 17'. 38''$ & l'inclinaiſon de l'orbite $72°. 34'. 10''$; les expreſſions pour le temps du Périhélie ſeront 1, 84392, 1, 86521, 1, 88618; d'où au moyen des corrections pour x, y, on trouve $y = 5'. 55''$, $x = 3'. 4''$. Soit donc la Longitude du Noeud $11^s. 26°. 21'. 0''$ & l'inclinaiſon de l'orbite $72°. 40'. 0''$, les expreſſions pour le temps du Périhélie ſeront: 1, 82813; 1, 82900; 1, 82644; d'où $y = -5''$; $x = -43''$. L'Hypothèſe de la Longitude du Noeud $11^s. 26°. 20'. 20''$, et de l'inclinaiſon de l'orbite $72°. 40'. 0''$ donne pour le temps du Périhélie ces expreſſions: 1, 83038; 1, 83014; 1, 83000; d'où $y = -3'',4$; $x = -0'',6$. Enfin par la ſuppoſition de la Longitude du Noeud $11^s. 26°. 20'. 20''$ & de l'inclinaiſon de l'orbite

72°.

72°. 39′. 56″, 6, on obtiendra ces expreſſions pour le temps du Périhélie 1, 83052; 1, 83049; 1, 83041; d'où $y = -0'', 7$ & $x = -1'', 1$; ainſi nous obtiendrons ces Elémens:

I.	Longitude du Noeud - -	11ˢ. 26°. 20′. 19″;
II.	Inclinaiſon de l'orbite - - -	72. 39. 56;
III.	Elongation du Périhélie au Noeud	88. 34. 9,8;
IV.	Logar. du demi-Paramètre - -	9, 9983309;
V.	Logar. de l'Excentricité - - -	9, 9995677;
VI.	Temps du Périhélie Novemb.	1, 83057, & le temps Périodique 11211, 7 Ans.

Or ayant employé ici par mépriſe une correction negative, je la ſuppoſerai plutôt additive et ſeulement d'une demi-Minute, d'où on aura Logar. du demi-Paramètre 9, 9971302; Logar. de l'Excentricité 9, 9972301 & le temps Périodique 693, 8 Ans.

§. 11. Paſſons maintenant à la troiſième obſervation, ou celle qui a été faite le 17 de Novembre, ici nous ſuppoſerons d'abord qu'il y ait pour la Longitude une correction de 2 Minutes à ajouter & en employant cette ſuppoſition: Longitude du Noeud 11ˢ. 26°. 17′. 38″; Inclinaiſon de l'orbite 72°. 34′. 10″, il en réſulte ces valeurs pour le temps du paſſage par le Périhélie: 1, 92345; 1, 90184; 1, 92599; d'où moyennant les corrections de x, y, on tire $y = -1'. 40''$; $x = +8'. 25''$. Suppoſant enſuite la Longitude du Noeud 11ˢ. 26°. 26′. 0″ & l'inclinaiſon de l'orbité 72°. 32′. 30″, les expreſſions pour le temps du Périhélie ſont: 1, 89612; 1, 89580; 1, 89886; d'où $y = -19''$; $x = +38''$. La ſuppoſition de la Longitude du Noeud 11ˢ. 26°. 25′. 23″ & de l'inclinaiſon de l'orbite 72°. 32′. 10″ donne ces expreſſions pour le temps

 du

du Périhélie: 1, 89837; 1, 89858; 1, 89886 & par là $y = 3''$, 9; $x = + 2''$, 9. Enfin cette Hypothèſe: Longitude du Noeud 11ˢ. 26°. 25′. 26″ & l'Inclinaiſon de l'orbite 72°. 32′. 15″, fournit ces expreſſions pour le temps du Périhélie: 1, 89808; 1, 89803; 1, 89803. Nous ferons donc uſage de ces Elémens:

I.	Longitude du Noeud - -	11ˢ. 26°. 25′. 26″;
II.	Inclinaiſon de l'orbite - -	72. 32. 15;
III.	Elongation du Périhélie au Noeud.	88. 38. 5, 8;
IV.	Logar. du demi-Paramètre - -	9, 9978875;
V.	Logar. de l'Excentricité - - -	9, 9991520;

VI. Temps du paſſage par le Périhélie Novembre 1, 89803 & le temps Périodique 4079, 8 Ans.

§. 12. Si la troiſième obſervation eſt ſuppoſée exacte par rapport à la Longitude, mais que la Latitude admette une correction de 3 Minutes à ſouſtraire; la ſuppoſition de la Longitude du Noeud 11ˢ. 26°. 17′. 38″ & de l'inclinaiſon de l'orbite 72°. 34′. 10″, donne les valeurs ſuivantes pour le temps du Périhélie 1, 92602; 1, 90356; 1, 87121, d'où au moyen des corrections pour x, y, on trouve $x = - 5'. 46''$; $y = - 7'. 13''$. La ſeconde ſuppoſition pour la Longitude du Noeud 11ˢ. 26°. 12′. 0″ & l'inclinaiſon de l'orbite 72°. 27′. 0″ donne pour le temps du Périhélie ces expreſſions: 1, 95181; 1, 95098; 1, 95057, d'où $y = - 5''$, 3; $x = + 27''$, 2. Enfin la ſuppoſition de la Longitude du Noeud 11ˢ. 26°. 12′. 25″ & de l'Inclinaiſon de l'orbite 72°. 27′. 0″, nous fournit pour le temps du Périhélie ces expreſſions: 1, 95053; 1, 95033; 1, 95024, d'où $y = - 2''$, 7; $x = 0''$, 1. Ainſi nous obtiendrons pour l'orbite Elliptique ces Elémens:

I.

I.	Longitude du Noeud - -	$11^s. 26^\circ. 12'. 25''$;
II.	Inclinaiſon de l'orbite - -	72. 26. 57, 3;
III.	Elongation du Périhélie au Noeud	88. 52. 16, 8;
IV.	Logar. du demi-Paramètre -	9, 9958845;
V.	Logar. de l'Excentricité - -	9, 9954734;
VI.	Paſſage par le Périhélie Novemb.	1, 95054 & le temps Périodique de 332, 7 Ans.

§. 13. Il eſt donc prouvé par ces calculs, que comme d'un coté il n'y à aucun doute, que la vraie orbite de la Comète obſervée en 1763 ne ſoit une Ellipſe; ainſi de l'autre coté, il eſt impoſſible de déterminer au juſte l'excentricité de cette orbite, comme il n'y a aucun moyen pour évaluer les erreurs qui probablement ſe trouvent dans les obſervations & ſur tout dans celle qui a été faite le 17. de Novembre. S'il y avoit moyen de déterminer ces erreurs, les calculs déja faits ſerviroient à déterminer aſſez exactement les Elémens pour la vraie orbite, puiſque les changemens des Elémens, ſont à fort peu près proportionels aux corrections des obſervations comme nous verrons par l'exemple de la troiſième obſervation. Car ſoit propoſé de trouver les Elémens d'une orbite Elliptique, la quelle ſatisfaſſe au deux premières obſervations & à la troiſième, en tant qu'on y applique une correction additive pour la Longitude de deux Minutes & pour la Latitude une correction ſouſtractive de 4 Minutes. En prenant donc des parties proportionelles, on aura par nos calculs des Artic. 11. 12.

La Longitude du Noeud - -	$11^s. 26^\circ. 18'. 29''$;
L'Inclinaiſon de l'orbite - - -	72. 22. 38;
Elongation du Périhélie au Noeud	88. 54. 42;

 Lo-

Logar. du Demi-Paramètre - - 9, 9956930;
Logar. de l'Excentricité - - 9, 9957708;
Temps du Périhélie Novemb. - 1, 9947.

Or par la ſuppoſition de la Longitude du Noeud 11ˢ. 26°. 18′. 30″ & de l'inclinaiſon de l'orbite 72°. 22′. 35″, on obtient pour le temps du Périhélie ces expreſſions: 1,99495; 1, 99504; 1, 99494, d'où l'on tire $x = + 0'', 4$; $y = - 2''$. Par ce moyen on parviendra à ces Elémens d'une orbite Elliptique:

I. Longitude du Noeud - - 11ˢ. 26°. 18′. 28″;
II. Inclinaiſon de l'orbite - - 72. 22. 34, 5;
III. Elongation du Périh. au Noeud 88. 54. 45, 2;
IV. Logar. du Demi-Paramètre - 9, 9956846;
V. Logar. de l'Excentricité - 9, 9957625;
VI. Paſſage par le Périhélie Novemb. 1, 99505, où la différence entre les Elémens exacts & ceux qu'on trouve par approximation eſt presque inſenſible: au moins elle n'influera pas conſidérablement pour changer le temps Périodique.

§. 14. Quoiqu'il ſoit impoſſible de fixer les erreurs des obſervations, il ſera pourtant permis d'employer par rapport à ces erreurs, quelque ſuppoſition vraiſemblable d'après la quelle on pourra déterminer les Elémens de l'orbite & ſur tout le temps Périodique. Nous ſuppoſerons donc que pour la première obſervation la Longitude a été bien déterminée, mais que pour la Latitude il y ait une correction d'une Minute entière à ſouſtraire. Pour le ſeconde obſervation, je ſuppoſerai qu'il y ait tant pour la Longitude que pour la Latitude une correction additive d'une demi-Minute. Enfin pour la troiſième obſervation, nous em-

employerons pour la Longitude une correction additive de deux Minutes & pour la Latitude une correction à soustraire de 4 Minutes. On obtiendra donc pour les observations ainsi corrigées ces Elémens:

I. Longitude du Noeud - -	$11^s. 26^o. 15'. 42''$;
II. Inclinaison de l'orbite - -	72. 20. 28;
III. Elongation du Périhélie au Noeud	88. 58. 23, 3;
IV. Logar. du Demi-Paramètre -	9, 9950782;
V. Logar. de l'Excentricité - -	9, 9945563;

VI. Temps du passage par le Périhélie 2, 0221 Novembre, & de là on conclut le temps Périodique de 293 Ans. Or comme les erreurs des observations ne sont que très arbitrairement fixées, on voit bien que la détermination du temps Périodique est très vague; en sorte qu'on est forcé d'avouer, que les observations ne sont pas assez exactes, pour déterminer la vraie orbite Elliptique. La correction que j'ai employée pour la Latitude observée le 17 de Novembre, paroit en effet un peu forte, cependant elle pourroit bien être encore plus grande, que je ne l'ai supposée. Car ayant employé les Elémens de l'orbite trouvés à l'Artic. 13, j'ai vu que pour le 13 Novemb. à $17^h. 31'. 25''$; il devoit y avoir la Longitude de la Comète $7^s. 2^o. 19'. 51''$ & la Latitude Boreale $19^o. 27'. 9''$; laquelle surpasse l'observée encore de $3'. 55''$; d'où on a raison de conclure que si on tâchoit d'abolir tout à fait la différence entre le calcul & l'observation par rapport à la Latitude observée le 13 de Novembre, il faudroit supposer dans la Latitude observée le 17 de Novembre une erreur de 8 à 9 Minutes.

§. 15.

§. 15. Il eſt certainement très facheux que l'exemple de cette Comète faſſe préſumer, que pour le plus grand nombre des Comètes il y a fort peu d'apparence de déterminer l'orbite Elliptique, car même lorsqu'on les a obſervées pendant qu'elles ont décrit de grandes portions de leurs orbites, il n'eſt pas poſſible de mettre tant d'exactitude dans les obſervations, qu'elle ſoit ſuffiſante pour une telle recherche. Sur tout je ſuis convaincu que les Comètes, qui dans leur Périhélie paſſent fort près du Soleil, ſont préciſement celles dont on viendra le plus difficilement à bout de déterminer l'excentricité. Car comme la diſtance Périhélie eſt fort petite, l'excentricité approchera beaucoup de l'unité, donc la détermination de l'Ellipticité deviendra d'autant plus difficile. Ainſi quoiqu'on ait quelque fois l'avantage d'obſerver ces Comètes pendant un temps aſſez conſidérable, on ne doit pas ſe flatter d'en conclure leur temps Périodique. Ayant fait le calcul de l'orbite Elliptique pour la Comète obſervée en 1769, je trouvai ſon temps de révolution de 482 Ans à peu près. (Recherches ſur la vraie orbite Elliptique de la Comète de l'An 1769 Pag. 136.) Et quoique pluſieurs autres combinaiſons des obſervations de cette Comète, m'ayent enſuite fourni des orbites Elliptiques peu différentes de celle, qui ſe trouve établie dans l'Ouvrage de Mr. *Euler*, je ſuis pourtant obligé de regarder toutes ces concluſions comme extrèmement douteuſes. Car d'abord je ſuis à préſent très aſſuré, que je n'ai pas alors pouſſé l'exactitude du calcul aſſez loin, & l'exemple de la Comète de 1763, auſſi bien que celui des Comètes obſervées en 1770 & 1773 m'ont convaincu, qu'il ne ſuffit pas même quelque fois dans la détermination des angles d'être

d'être fûr des fecondes entières, mais qu'il faut encore déterminer les dixiemes parties de fecondes. Pour la Comète de 1769 il y avoit d'ailleurs cette circonftance, que les deux portions de fon orbite dans lesquelles on l'a obfervée, font presque égalément éloignées du Périhélie & comme ces portions font fort petites, on ne manquera pas de leur fatisfaire par une orbite Parabolique; & même plufieurs Aftronomes ayant calculé le mouvement de cet Aftre dans une orbite Parabolique les erreurs des obfervations ne font pas devenues trop groffières.

§. 16. Pour ce qui regarde la Comète obfervée en 1770, quelque Paradoxe que paroiffe la conclufion que j'ai trouvé pour le temps Périodique de cet aftre; il eft ce me femble affez bien prouvé, que fon orbite ne fauroit être Parabolique, & même que le temps Périodique quelques erreurs qu'on fuppofe dans les obfervations ne furpaffera pas dix ans. Cependant étant à préfent convaincu par l'exemple des Comètes obfervées en 1763, 1773, que dans les cas, où l'on a de la peine à voir les Comètes à caufe de la foibleffe de leur lumière, il fe peut gliffer dans les obfervations des erreurs de 10 à 15 Minutes, je ne veux pas disconvenir, que le temps Périodique, que j'ai trouvé pour la Comète de 1770 ne pût admettre quelque augmentation; mais malgré cela je doute fi moyennant une telle augmentation, on fatisfera auffi bien aux obfervations, que je l'ai fait par les Elémens que j'ai propofés. Si les Aftronomes vouloient inferer de ce que cette Comète n'a pas reparu, que tout ce que j'ai avancé par rapport à fon temps Périodique eft faux & précaire; il faut qu'ils obfervent, que cette Comète ayant une lumière très foible, n'eft pas peut-être vifible chaque fois qu'elle paffe

 à

à fon Périhélie. D'ailleurs l'excentricité de cette Comète étant o, 778, fon orbite differe beaucoup plus d'une orbite Parabolique que celle de la Comète obfervée en 1759, dont l'excentricité eft o, 968; & de là on doit préfumer que fi une orbite Elliptique avec une telle excentricité fatisfait aux obfervations, d'autres Ellipfes dans les quelles l'excentricité approche plus de l'unité, ne manqueront pas de s'éloigner beaucoup des obfervations.

§. 17. Si jusqu'à préfent on n'eft pas venu à bout de déterminer le temps Périodique des Comètes en général, il ne faut pas croire que cela vienne d'un défaut de la Théorie. Quelques pénibles que foient les Méthodes dont on fait ufage pour calculer les Comètes, on eft toujours maitre de leur donner affez d'exactitude, c'eft à dire il eft toujours poffible de trouver les Sections Coniques, qui fatisfont exactement à trois obfervations propofées quelconques. Mais comme les orbites décrites par des Comètes font des Ellipfes très allongées, & que ces Aftres ne font vifibles que vers leur paffage par le Périhélie, la portion de l'orbite décrite par une Comète eft dans le plus grand nombre des cas trop petite pour en conclure l'excentricité de l'orbite. Il eft même bien vraifemblable d'après l'experience que j'ai faite à l'égard de cette Comète de 1763, qu'on ne réuffira pas à déterminer l'orbite Elliptique d'aucune de celles, dont on n'a pas encore fait l'effai, quoique d'ailleurs on pût croire que la chofe doit être affez facile parce qu'elles ont décrit des angles un peu confidérables autour du Soleil. Il vaudra pourtant la peine d'entreprendre cette recherche afin de pouvoir prononcer avec fureté fur une queftion qui n'eft pas encore decidée.

ME-

MÉMOIRE SUR LES ELÉMENS DE LA COMÈTE DE L'ANNÉE 1780,

PAR

A. J. LEXELL.

§. 1.

Monsieur *Messier* ayant découvert cette Comète quelques jours avant mon arrivée à Paris l'Année 1780, j'ai profité du loisir que j'avois, pour faire le calcul du mouvement de cet Astre d'après les observations que Mr. *Messier* eut la bonté de me communiquer. Dans la *Connoissance des temps* pour 1782, Mr. *Jeaurat* a inséré les Elémens de cette Comète tels que je venois de les trouver, & ces mêmes Elémens ont ensuite été insérés dans les Ephemerides de Milan pour l'An. 1782. Or comme ces livres se trouvent entre les mains de tous les Astronomes il seroit superflu de s'occuper de nouveau des Elémens de cette Comète, si mon principal dessein n'étoit pas

pour le préſent, d'examiner quel dégré de confiance ces Elémens peuvent meriter. Car la Comète n'ayant été obſervée que pendant l'eſpace d'un mois, elle n'a décrit pendant ſon apparition qu'un angle de 10°. 30′ à peu près autour du Soleil; il eſt par conſéquent aiſé de s'imaginer, qu'il exiſte pluſieurs orbites Paraboliques par les quelles on ſatisfait aux obſervations. Il vaut donc bien la peine d'examiner avec quelle préciſion les Elémens de cette Comète peuvent être déterminés.

§. 2. Lorqu'il s'agit de déterminer l'orbite Parabolique d'une Comète, il eſt clair que ſi l'on ſuppoſe quelque Elément pour cette orbite connu; deux obſervations ſeront ſuffiſantes pour déterminer tous les autres Elémens. En ſuppoſant donc la Longitude du Noeud connue au moins à peu près, pour chercher les autres Elémens, on fera pluſieurs ſuppoſitions pour l'inclinaiſon de l'orbite, enſuite au moyen de ces deux Elémens connus, on cherchera pour deux obſervations propoſées, les angles que les rayons vecteurs tirés de la Comète au Soleil font avec la ligne du Noeud & les valeurs de ces rayons vecteurs eux mêmes. Alors toute la recherche ſe reduit à la ſolution de ce Problème: trouver une ligne Parabolique, qui paſſe par deux points donnés, le foyer de cette Parabole étant auſſi donné. Soit pour la première obſervation, v le rayon vecteur & Φ l'angle de l'anomalie compté du Périhélie; pour la ſeconde obſervation, v' le rayon vecteur & Φ' l'angle de l'anomalie, & b le demi-paramètre de l'orbite; on aura donc par les propriétes connues de la Parabole:

$\frac{v}{b}$

$\frac{v}{b} = 1 + \text{cos}\,\Phi = 2\,\text{cos}\,\tfrac{1}{2}\Phi^2$; $\frac{v'}{b} = 1 + \text{cos}\,\Phi' = 2\,\text{cos}\,\tfrac{1}{2}\Phi'^2$;
donc

$$\frac{\text{cos}\,\tfrac{1}{2}\Phi'}{\text{cos}\,\tfrac{1}{2}\Phi} = \sqrt{\tfrac{v}{v'}} = u \text{ et } \text{tang.}\,\tfrac{1}{4}(\Phi' - \Phi)\,\text{tang.}\,\tfrac{1}{4}(\Phi' + \Phi)$$

$$= \frac{\text{cos}\,\tfrac{1}{2}\Phi - \text{cos}\,\tfrac{1}{2}\Phi'}{\text{cos}\,\tfrac{1}{2}\Phi + \text{cos}\,\tfrac{1}{2}\Phi'} = \frac{1 - u}{1 + u}, \text{ donc}$$

$$\text{tang.}\,\tfrac{1}{4}(\Phi' + \Phi) = \tfrac{1 - u}{1 + u}\,\text{cot.}\,\tfrac{1}{4}(\Phi' - \Phi),$$

& par cette formule les quantités u et $\Phi' - \Phi$ étant connues, on obtiendra l'angle $\Phi' + \Phi$, par conſequent auſſi les deux angles Φ & Φ' & le demi-paramètre qui ſera

$$b = 2\,v\,\text{cos}\,\tfrac{1}{2}\Phi^2 = 2\,v'\,\text{cos}\,\tfrac{1}{2}\Phi'^2.$$

Enſuite au moyen de Φ', Φ, b donnés, on calculera le temps écoulé entre les deux obſervations & ſi ce temps s'accorde avec l'obſervé, la ſuppoſition pour l'inclinaiſon de l'orbite eſt juſte. Si non, on trouvera par les différences pour les diverſes ſuppoſitions qu'on a faites, la quelle ſera la vraie.

§. 3. La première combinaiſon que j'ai faite, eſt celle des obſervations du 26 d'Octobre & du 20 de Novembre. Suppoſant d'abord la Longitude du Noeud $4^s.\ 5°$, j'ai trouvé les autres Elémens déterminés de cette maniere:

Inclinaiſon de l'orbite	52°. 37′. 0″;
Elongation du Périhélie au Noeud	121. 3. 47;
Logar. Diſtance Périhélie	= 9,0153512;

Temps du paſſage par le Périhélie 1780 Sept. 30,4792, ou Sept. 30, $11^h.\ 30'$ à peu près du temps moyen de Paris. D'après ces Elémens, j'ai calculé quelques lieux de la Comète, comme il paroît par la Table ci-jointe.

 Temps

Temps vrai de Paris 1780.	Long. de la Comète Calculée.	Comète obſervée	Latit. de la Comète Calculée.	Comète obſerv.
Oct. 31. 16^h. 38$'$. 30$''$	5^s. 16°. 59$'$. 58$''$	+ 4$''$	14° 5$'$. 45$''$ B	− 49$''$
Nov. 2. 17. 17. 7	16. 3. 48	− 2$'$. 39	15. 25. 35	+ 34
4. 17. 5. 52	15. 6. 37	− 2. 15	16. 46. 50	+ 8
5. 18. 26. 44	14. 35. 21	− 3. 34	17. 29. 42	− 36
6. 16. 2. 49	14. 18. 3	− 2. 0	18. 6. 25	+ 15
7. 17. 9. 43	13. 35. 41	+ 1. 57	18. 49. 22	+ 19
15. 14. 24. 46	9. 1. 42	+ 17	- - - -	- -
21. 16. 56. 24	4. 36. 36	− 1. 50	28. 42. 46	+ 1$'$. 58

On voit bien par ces calculs qu'il faut une correction aſſez ſenſible pour la Longitude du Noeud, lorsqu'on ſe propoſe de diminuer l'erreur en Longitude pour les obſervations faites depuis le 2 jusqu'au 7 de Novembre.

§. 4. Si l'on ſuppoſe la Longitude du Noeud 4^s. 4°. 50$'$, en faiſant toujours la combinaiſon des obſervations du 26 d'Octobre & du 20 de Novembre les Elémens de l'orbite ſeront;

Longitude du Noeud	4^s. 4°. 50$'$. 0$''$;
Inclinaiſon de l'orbite	52. 50. 44;
Elongation du Périhélie au Noeud	121. 18. 26;
Logar. de la diſtance Périhélie	9,0112448;
Temps du Périhélie Sept. 30, 5382.	

Or ce changement de dix Minutes dans la Longitude du Noeud ne produit que des changemens peu ſenſibles pour la plupart des lieux de la Comète, comme il paroît par cet échantillon:

Temps

Temps vrai de Paris		Longit. calculée	Latitud. calc.
Nov.	2. 17^h. 17$'$. 7$''$	5^s. 16°. 3$'$. 32$''$	15°. 25$'$. 45$''$ B
	7. 17. 9. 43	13. 35. 37	18. 49. 30
	15. 14. 24. 46	9. 1. 34	- - -
	21. 16. 56. 24	4. 35. 35	28. 45. 42

§. 5. La variation dans le lieu de la Comète calculé pour le 21 de Novembre étant pourtant assez remarquable sur tout par rapport à la Latitude, cela m'a fait venir la pensée d'examiner quelles variations les Elémens de la Comète subissent selon qu'on fait la combinaison de l'observation du 26 d'Octobre, avec différentes autres observations, faites vers la fin de l'apparition. Ayant donc supposé la Longitude du Noeud 4^s. 4°. 0$'$ & faisant la combinaison de l'observation du 26 d'Octobre avec celles du 20, 21, 23 et 25 de Novembre, les Elémens pour l'orbite de la Comète se trouvent déterminés de cette maniere :

Novbr.	Inclin. de l'orbite	Elong. du Périhél. au Noeud
20.	53°. 58$'$. 35$''$	122°. 29$'$. 37$''$
21.	57. 47	22. 50
23.	57. 46	25. 55
25.	57. 6	29. 45

	Log. de la dist. Périhélie	Temps du Périhélie Sept.
20.	8, 9908292	30, 8354
21.	8, 9931547	30, 8210
23.	8, 9920915	30, 8261
25.	8, 9905856	30, 8413.

Puisque ces Elémens s'accordent assez bien entre eux, il n'est pas à presumer, qu'il resulte des différentes combinaisons

naiſons des obſervations des changemens fort ſenſibles pour les lieux de la Comète, calculés pour les premiers jours du mois de Novembre. Par la combinaiſon des obſervations du 26 d'Octobre & du 21 de Novembre j'ai trouvé pour le 7 Nov. $17^h. 9'. 48''$. t. v. de Paris, la Longitude de la Comète $5^s. 13°. 34'. 25''$ & la Latitude $18°. 51'. 8''$; où la Longitude s'accorde mieux avec l'obſervation, que celle qui eſt calculée d'après les Elémens de l'Artic. 3, mais en revange la Latitude differe d'autant plus de l'obſervation.

§. 6. Puiſque les Elémens de l'orbite d'une Comète ſont ſans doute d'autant plus ſûrs, que les obſervations employées dans le calcul ſont plus éloignées entre elles, j'ai cru que la combinaiſon de la dernière obſervation de la Comète faite le 28 de Novembre, avec la première du 26 d'Octobre donneroit pour l'orbite les réſultats les plus certains. Pour cet effet j'ai cherché les Elémens de la Comète au moyen de ces obſervations d'après trois ſuppoſitions pour la Longitude du Noeud, ſavoir

$4^s. 4°. 0'$; $4^s. 4°. 30'$; $4^s. 5°. 30'$.

Le premier ſyſtême des Elémens eſt donc celui-ci:

Longitude du Noeud	$4^s. 4°. 0'. 0''$;
Inclinaiſon de l'orbite	53. 56. 28;
Elongation du Périhélie au Noeud	122. 30. 14;
Logar. de la diſtance Périhélie	8,99037I3;
Temps du Périhélie Sept.	30, 8447.

Et

Et les lieux de la Comète calculés d'après ces Elémens ſont:

Temps vrai de Paris 1780.	Longitude de la Comète Calcul.	observée.	Latitude de la Comète Calcul.	observée.
Oct. 26. 17^h. 4'.38''	5^s. 9°.14'. 4''	− 2''	10°.49'.38''	+ 1''
31. 16. 38. 30	16. 59. 6	+ 6	14. 6. 22	−1'. 26
Novembr.				
2. 17. 17. 7	16. 2. 36	−1'. 27	15. 27. 24	−1. 15
4. 17. 5. 52	15. 5. 21	−59	16. 47. 49	−51
5. 18. 26. 44	14. 33. 51	−2. 4	17. 30. 40	−1. 34
6. 16. 2. 49	14. 6. 35	−32	18. 7. 24	−44
7. 17. 9. 43	13. 34. 7	−23	18. 50. 22	−41
15. 14. 24. 46 (α)	8. 58. 28	−3. 31	24. 21. 9	+2. 52
16. 22. 3 (β)	8. 55. 30	−3. 4	24. 24. 35	+2. 19
20. 13. 22 42	5. 28. 12	+47	27. 53. 32	+ 4
21. 16. 56. 24	4. 34. 24	+22	28. 42. 45	+1. 59
23. 14. 12. 53	3. 1. 27	+37	30. 3. 24	+1. 11
25. 14. 55. 33	1. 14. 49	+17	31. 29. 29	+ 5
28. 13. 45. 50	4. 28. 26. 53	+ 0	33. 32. 13	+ 0.

§. 7. Dans le ſecond Syſtême des Elémens de la Comète on a:

La Longitude du Noeud	4^s. 4°. 30'. 0'';
l'Inclinaiſon de l'orbite	53. 15. 20;
Elongation du Périhélie au Noeud	121. 49. 21;
Logar. de la diſtance Périhélie	9, 0020265;
Temps du Périhélie Sept.	30, 6725

 Les

Les lieux de la Comète calculés d'après ces Elémens font:

	Longitude de la Comète.		Latitude de la Comète.	
	Calculée	obfervée.	Calculée	obfervée.
Oct. 26	$5^s.19^\circ.13'.56''$	$+\ 6''$	$10^\circ.49'.41''$	$-\ 2''$
31	16. 59. 28	+34	14. 6. 0	−1'. 4
Nov. 2	16. 3. 13	−2'. 4	15. 26. 51	−42
4	15. 5. 43	−1. 21	16. 47. 10	−12
5	14. 34. 22	−2. 35	17. 30. 3	−57
6	14. 7. 7	−1. 4	18. 6. 45	−5
7	13. 34. 45	−1. 1	18. 49. 40	+1
15 (α)	8. 59. 17	+2. 42	24. 20. 24	+3. 37
15 (β)	8. 55. 51	+2. 43	24. 23. 58	+2. 56
20	5. 28. 22	+37	27. 53. 2	+34
21	4. 34. 48	−2	28. 42. 18	+2. 26
23	3. 1. 41	+23	30. 3. 4	+1. 31
25	1. 14. 54	+12	31. 29. 15	+19
28	4. 28. 26. 53	+0	33. 32. 13	+0

Les moments des obfervations font les mêmes que pour le premier fyftême, donc pour éviter de la prolixité, je n'ai pas jugé à propos de les repéter.

§. 8. Enfin le dernier Syftême des Elémens de la Comète eft celui-ci:

Longitude du Noeud	$4^s.\ 5^\circ.\ 30'.\ 0''$;
Inclinaifon de l'orbite	51. 56. 33;
Elongation du Périhélie au Noeud	120. 24. 55;
Logar. de la diftance Périhélie	9,0258264;
Temps du Paffage par le Périhél. Sept.	30, 3124;

Moyen

Moyennant ces Elémens les lieux calculés de la Comète seront:

1780.	Longitude de la Comète. Calculée	observée.	Latitude de la Comète. Calculée	observée.
Oct. 26	5ˢ. 19°. 14′. 3″	− 1′	10°. 49′. 39″	+ 0″
31	17. 0. 38	−36	14. 4. 23	+33
Nov. 2	16. 4. 5	−2′. 56	15. 25. 52	+17
4	15. 7. 34	−3. 12	16. 44. 59	+1. 59
5	14. 36. 17	−5. 30	17. 27. 44	+1. 22
6	14. 8′. 33	−2. 30	18. 5. 23	+1. 17
7	13. 36. 14	−2. 30	18. 48. 15	+1. 26
15(α)	9. 1. 32	+27	24. 17. 42	+6. 19
15(β)	8. 58. 14	+20	24. 21. 11	+5. 43
20	5. 30. 22	−1. 23	27. 51. 43	+1. 53
21	4. 36. 4	−1. 18	28. 41. 18	+3. 26
23	3. 2. 43	−39	30. 2. 18	+2. 17
25	1. 16. 15	−1. 9	31. 28. 34	+1. 0
28	4. 28. 26. 55	− 2	33. 32. 13	+ 0

§. 9. La progreſſion ſelon la quelle les erreurs procèdent dans ces calculs, fait préſumer qu'il y a dans quelques uns des lieux calculés de petites fautes de 10 à 20 ſecondes, ce qui doit d'autant moins paroitre ſurprenant, que pour les Elémens du ſecond Syſtème, le lieu calculé pour le 26 d'Octobre differe de l'obſervé de 6″ en Longitude: or de cette petite différence il en peut reſulter de plus grandes pour les obſervations intermédiaires. Quoiqu'il en ſoit il eſt aſſez évident par nos calculs, que ſi en ſatisfaiſant aux deux obſervations du 26 d'Octobre & du 28 de Novembre on tâchoit en même temps de ſa-

tisfaire à quelqu'une de celles qui ont été faites depuis le 2 jusqu'au 7 de Novembre par rapport à la Longitude, il faudroit certainement diminuer la Longitude du Noeud en la ſuppoſant par exemple de $4^s. 3^\circ. 30'$, ou encore plus petite: mais par ce moyen on augmenteroit les erreurs en Latitude pour ces mêmes obſervations. Pour ce qui regarde les obſervations faites depuis le 20 jusqu'au 25 de Novembre, les erreurs en Longitude ſeront augmentées par ce changement & les erreurs en Latitude en partie augmentées, en partie auſſi diminuées. Or comme dans les obſervations des Comètes, il peut bien ſe gliſſer des erreurs de deux Minutes, il eſt ce me ſemble aſſez clair, que les deux premiers Syſtêmes peuvent être eſtimés également vraiſemblables & que par conſéquent les Elémens de l'orbite de cette Comète ne ſauroient être détermines qu'avec une très grande Latitude. Dans le troiſième Syſtême des Elémens, les erreurs ſont certainement trop fortes, d'où je conclus qu'on ne doit pas augmenter la Longitude du Noeud beaucoup au de là de $4^s. 4^\circ. 30'$. En tout cas je crois qu'il ſera permis de donner à la Longitude du Noeud l'étendue d'un dégré, en ſuppoſant qu'elle ſoit compriſe entre $4^s. 3^\circ. 40'$ et $4^s. 4^\circ. 40'$. d'où il s'enſuit que l'inclinaiſon de l'orbite ſera compriſe entre $54^\circ. 24'$ et $53^\circ. 2'$; l'Elongation du Périhélie au Noeud entre $122^\circ. 58'$ et $121^\circ. 35'$; le Logar. de la diſtance Périhélie entre 8,9826012 & 9,0059116, enfin le temps du paſſage par le Périhélie entre Sept. 30,96 et 30,62. Au reſte toutes les circonſtances prouvent que les obſervations faites le 15 de Novembre ſont fautives, puisque quelque Syſtême d'Elémens qu'on choiſiſſe,

ſiſſe, il n'eſt pas poſſible de les rendre d'accord avec les autres obſervations.

§. 10. Si au lieu d'employer l'obſervation du 28 de Novembre, on faiſoit uſage de quelque autre parmi celles, qui ont été faites depuis le 20 de Novembre, les changemens dans les Elémens de l'orbite ne deviendroient pas exceſſivement grands. Car faiſant la combinaiſon de l'obſervation du 21 de Novembre avec celle du 26 d'Octobre & ſuppoſant la Longitude du Noeud $4^s. 4^o. 30'$ comme dans le ſecond Syſtême des Elémens, on aura:

l'Inclinaiſon de l'orbite	$53^o. 15'. 49$;
l'Elongation du Périhélie au Noeud	121. 40. 22;
Logar. de la diſtance Périhélie	9,0052292;
Temps du Périhélie Sept.	30,6478.

D'où il eſt demontré que ſuppoſant la Longitude du Noeud connue, l'inclinaiſon de l'orbite reſtera presque la même quelque obſervation qu'on choiſiſſe parmi celles qui ont été faites depuis le 20 jusqu'au 28 de Novembre. Mais pour les autres Elémens, ſavoir l'elongation du Périhélie au Noeud, la diſtance Périhélie & le temps du Périhélie les changements ſont plus ſenſibles. D'après les derniers Elémens j'ai trouvé la Latitude de la Comète pour le 25 de Novembre $14^h. 55'. 33''$, de $31^o. 32'. 6''$ B, la quelle diffère très conſidérablement de celle, qui a été calculée d'après les Elémens du ſecond Syſtême, préciſement comme il doit arriver, parceque la Latitude pour le 28 de Novembre étant aſſez bien d'accord avec celle qui a été obſervée le 25, elle differe conſidérablement de la Latitude obſervée le 21 de Novembre.

 §. 11.

§. 11. Lorsqu'on ſe rapelle que les Comètes étant environnées d'une nebuloſité & ayant des Diamètres aſſez ſenſibles, il n'eſt pas aiſé de déterminer le juſte moment auquel leurs centres paſſent par le fil horaire d'une Lunette; on conçoit auſſi qu'il n'eſt pas extraordinaire de trouver dans les obſervations des Comètes des erreurs de deux à trois Minutes. Par cette raiſon les Aſtronomes qui s'occupent de la recherche des Elémens des orbites pour les Comètes, ne devroient pas traiter les obſervations comme des quantités Géometriques dont la grandeur abſolue eſt indubitablement fixée: encore moins doit on être ſurpris, que lorsque pluſieurs Aſtronomes font le calcul de la même Comète, il ſe préſente des différences aſſez ſenſibles par rapport aux Elémens, ſelon que ces Aſtronomes ont fait uſage des différentes obſervations. Si quelqu'un en vouloit inférer, qu'on ne ſauroit conclure rien de certain par rapport à ces Elémens, il jugeroit ſans connoiſſance de cauſe.

§. 12. Enfin il nous reſteroit à examiner s'il n'y auroit pas moyen de rendre les autres obſervations mieux d'accord entre elles, en ſuppoſant qu'il y ait dans celle du 26 d'Octobre quelque faute, comme il a bien pu arriver, vu que cette obſervation étant la première, elle peut n'avoir pas été faite avec autant de préciſion que les autres. Mais comme cette obſervation s'accorde aſſez bien avec celle du 31 d'Octobre & que d'ailleurs il ne s'agit ici que d'avoir des Elémens de la Comète à peu près exacts, j'ai cru qu'il ſeroit ſuperflu d'entreprendre cette recherche.

DE

DE MOTV COMETARVM EX TRIBVS OBSERVATIONIBVS DETERMINANDO.

Auctore

NICOLAO FUSS.

§. 1.

Si quispiam Cometa in ipſo plano eclipticae moveri deprehenderetur, nullae aliae ad eius orbitam explorandam methodi adhiberi poſſent, praeter eas, quae iam paſſim ſunt vſurpatae, quibus, poſt plura tentamina, elementa orbitae continuo accuratius definiri ſolent. Si enim iſtum caſum quis directe geometrica methodo expedire voluerit, ſtatim ab initio in calculum introducere deberet has incognitas: 1°) Poſitionem lineae abſidum. 2°) Diſtantiam Perihelii a Sole; 3°) Tempus, quo Cometa per Perihelium tranſierit. Has deinde incognitas quaſi eſſent cognitae ſpectando pro tempore cuiusque obſeruationis loca cometae in ſua orbita com-

computari deberent, quae cum ſint heliocentrica porro ad geocentrica reuocanda et cum locis obſeruatis comparanda forent, quo facto totidem prodirent aequationes, quot obſeruationes fuerint factae. Vnde intelligitur, ob ternas incognitas totidem quoque obſeruationibus opus fore ad Problema ſoluendum. Verum qui hunc laborem tentauerit, mox deprehendet, in tribus aequationibus finalibus incognitas tantopere fore inter ſe permiſtas et complicatas, vt inde nullo modo earum determinatio exſpectari queat. Methodo igitur illa indirecta, per approximationes procedente, caſu quo cometa in ecliptica mouetur, neceſſario erit vtendum.

§. 2. Quando autem orbita cometae ad eclipticam ſub angulo ſatis notabili inclinatur, tum res longe aliter ſe habere facile deprehenditur, propterea quod quaelibet obſeruatio binas quantitates datas in calculum ſuppeditat, quarum altera ex obſeruata longitudine altera ex obſeruata latitudine cometae eſt petenda. Hanc ob cauſſam tota orbitae inueſtigatio longe aliam faciem induit; vnde hunc caſum eo maiori ſtudio pertractare operae pretium erit, quod nullus adhuc cometa apparuit, cuius orbita cum ecliptica prorſus congruiſſet.

§. 3. Quomodocunque autem orbita cometae reſpectu eclipticae fuerit comparata, quoniam omnes cometae orbitas ſuas in plano per Solem transeunte percurrunt: eorum ſitus relatiuus, hoc eſt locus heliocentricus et diſtantia a Sole, ex poſitione lineae nodorum atque inclinatione orbitae ad eclipticam determinabitur. Haec duo momenta adeo ita ſunt comparata, vt, ſi tanquam cogni-

ta ſpectentur, eorum ope ex quolibet cometae loco geocentrico verum cometae locum heliocentricum, hoc eſt tam diſtantiam eius veram a Sole quam argumentum latitudinis, ſiue angulum, quo cometa in ſua orbita a linea nodorum diſtat, aſſignare valeamus, id quod ſequenti modo praeſtari poteſt.

§. 4. Referat hunc in finem tabula planum eclipticae, ad quam orbita cometae inclinetur angulo ω, ſitque S centrum Solis et S ☊ linea nodorum. Iam pro tempore, quo obſeruatio eſt facta, quaeratur primo locus Terrae ex Sole viſae, qui ſit in T, vnde ſtatim innoteſcet angulus ☊ S T $= \Phi$. Sit pro eodem tempore diſtantia Terrae a Sole S T $= a$, exiſtente diſtantia media $= 1$. Ipſe Cometa tempore obſeruationis verſetur in Z, ex quo puncto ad planum eclipticae demittatur perpendiculum Z C, et iuncta recta T Z ex longitudine Cometae obſeruata innoteſcet angulus S T C $= \lambda$; ex latitudine vero obſeruata habebitur angulus C T Z $= \eta$; ipſa vero diſtantia Cometae a Terra vocetur T Z $= z$. Nunc ad lineam nodorum ex punctis T et C ducantur normales C P et T V, et vlterior inueſtigatio ſequenti modo inſtituetur.

Tab VI. Fig. 4.

§. 5. Statuatur interuallum C T $= x$ et C Z $= \delta x$, eritque ex triangulo rectangulo C T Z anguli C T Z tangens $= \frac{CZ}{CT} = \delta$, ideoque $\delta =$ tang. η, hoc eſt tangenti latitudinis obſeruatae aequale. Iam ex C in T V agatur normalis C U, et quia angulus S T V $= 90° - \Phi$, erit angulus C T U $= 90° + \lambda - \Phi$, ſiue, poſito breuitatis gratia $90° + \lambda = \alpha$, erit C T U $= \alpha - \Phi$; ſicque ex triangulo C T U habebimus

$$CU = x \sin.(\alpha - \Phi) \text{ et } TU = x \cos.(\alpha - \Phi);$$

ex triangulo autem S T V colligitur

$$SV = a \cos.\Phi \text{ et } TV = a \sin.\Phi,$$

vnde fit

$$SP = SV - CU = a \cos.\Phi - x \sin.(\alpha - \Phi)$$

$$CP = TV - TU = a \sin.\Phi - x \cos.(\alpha - \Phi).$$

His inuentis triangulum Z C P, ad C rectangulum, praebet tangentem inclinationis C P Z, hoc est

$$\text{tang.}\,\omega = \frac{CZ}{CP} = \frac{\delta x}{a \sin.\Phi - x \cos.(\alpha - \Phi)}.$$

Datae autem hic concipiuntur ipsa positio lineae nodorum, siue angulus Φ, et inclinatio orbitae ad eclipticam, seu angulus ω, per quae igitur elementa interuallum C T ita determinatur, vt sit

$$CT = x = \frac{a \sin.\Phi \text{ tang.}\,\omega}{\delta + \cos.(\alpha - \Phi) \text{ tang.}\,\omega}$$

ex quo porro, ob $x = z \cos.\eta$, deducitur distantia Cometae a Terra, hoc est interuallum

$$TZ = z = \frac{a \sin.\Phi \text{ tang.}\,\omega}{\cos.\eta\,(\delta + \cos.(\alpha - \Phi) \text{ tang.}\,\omega)}.$$

§. 6. Quodsi iam valor ipsius x in expressionibus pro interuallis S P, C P, C Z supra inuentis substituatur, prodibunt sequentes valores:

$$SP = \frac{\delta a \cos.\Phi + a \cos.\alpha \text{ tang.}\,\omega}{\delta + \cos.(\alpha - \Phi) \text{ tang.}\,\omega};$$

$$CP = \frac{\delta a \sin.\Phi}{\delta + \cos.(\alpha - \Phi) \text{ tang.}\,\omega};$$

$$CZ = \frac{\delta a \sin.\Phi \text{ tang.}\,\omega}{\delta + \cos.(\alpha - \Phi) \text{ tang.}\,\omega};$$

ex quibus porro deducitur interuallum

$$ZP = \sqrt{(CP^2 + CZ^2)} = \frac{\delta a \sin.\Phi}{\cos.\omega\,(\delta + \cos.(\alpha - \Phi) \text{ tang.}\,\omega)}.$$

Du-

Ducatur nunc recta SZ, voceturque distantia Cometae a Sole $SZ = y$, sitque elongatio Cometae a linea nodorum, hoc est argumentum latitudinis, siue angulus $PSZ = \theta$; eritque ex triangulo SPZ, ad P rectangulo, tangens elongationis, hoc est $\text{tang.}\,\theta = \frac{ZP}{SP}$, et distantia $SZ = y = \frac{ZP}{\text{sin.}\,\theta}$; sicque ex vnica obseruatione geocentrica deducitur, quod quaerimus: argumentum latitudinis θ et vera Cometae a Sole distantia y. Erit enim

$$\text{tang.}\,\theta = \frac{\delta\,\text{sin.}\,\Phi}{\text{cos.}\,\alpha\,\text{sin.}\,\omega + \delta\,\text{cos.}\,\Phi\,\text{cos.}\,\omega},$$

$$y = \frac{\delta\,a\,\text{sin.}\,\Phi}{\text{sin.}\,\theta\,\text{cos.}\,\omega\,(\delta + \text{cos.}\,(\alpha - \Phi)\,\text{tang.}\,\omega)}.$$

§. 7. Hae autem binae expressiones ad vsum practicum magis accommodari possunt sequenti modo: Quaeratur angulus ψ, cuius tangens sit $\text{tang.}\,\psi = \frac{\delta\,\text{cos.}\,\Phi}{\text{cos.}\,\alpha}$; tum vero quaeratur angulus ζ, cuius tangens sit $\text{tag.}\,\zeta = \frac{\delta}{\text{cos.}(\alpha - \Phi)}$, quibus inuentis argumentum latitudinis et distantia Cometae a Sole per has formulas magis concinnas determinabuntur:

$$\text{tang.}\,\theta = \frac{\text{sin.}\,\psi\,\text{tang.}\,\Phi}{\text{sin.}\,(\omega + \psi)};\quad y = \frac{a\,\text{sin.}\,\Phi\,\text{sin.}\,\zeta}{\text{sin.}\,\theta\,\text{sin.}\,(\zeta + \omega)}.$$

Haec angulorum ζ et ψ introductio et ingeniosissimum compendium inde natum debetur Celeberrimo *Lexell*, qui elegantem huius Problematis Solutionem Tomo primo Nouorum Actorum inseruit.

§. 8. Quod si hoc modo tres obseruationes fuerint pertractatae, dum Terra exstitit in T, T', T'', quibus locis respondeant anguli pro positione lineae nodorum

$$☊ST = \Phi,\ ☊ST' = \Phi',\ ☊ST'' = \Phi'',$$

et diſtantiae

$$ST = a,\ ST' = a',\ ST'' = a'';$$

tum ſtatim manifeſtum eſt, differentias angulorum Φ, puta $TST' = \Phi' - \Phi$, atque $TST'' = \Phi'' - \Phi$ eſſe cognitas. Porro ex longitudine obſeruata innoteſcent anguli

$$STC = \lambda,\ ST'C' = \lambda',\ ST''C'' = \lambda'',$$

ex latitudine vero anguli

$$CTZ = \eta,\ C'T'Z' = \eta',\ C''T''Z'' = \eta'',$$

ex quibus conficiuntur valores $\alpha, \alpha', \alpha''$ et $\delta, \delta', \delta''$, quibus inuentis ſi pro ternis Cometae locis veris Z, Z', Z'' vocentur argumenta latitudinis

$$☊SZ = \theta,\ ☊SZ' = \theta',\ ☊SZ'' = \theta'',$$

et diſtantiae verae Cometae a Sole

$$SZ = y,\ SZ' = y',\ SZ'' = y'',$$

ſuperior inueſtigatio ſuppeditat

Pro prima obſeruatione:

$$\text{tang.}\ \psi = \frac{\delta\ \text{coſ.}\ \Phi}{\text{coſ.}\ \alpha};\ \text{tang.}\ \theta = \frac{\text{ſin.}\ \psi\ \text{tang.}\ \Phi}{\text{ſin.}\ (\omega + \psi)},$$

$$\text{tang.}\ \zeta = \frac{\delta}{\text{coſ.}\ (\alpha - \Phi)};\ y = \frac{a\ \text{ſin.}\ \Phi\ \text{ſin.}\ \zeta}{\text{ſin.}\ \theta\ \text{ſin.}\ (\zeta + \omega)}.$$

Pro ſecunda obſeruatione:

$$\text{tang.}\ \psi' = \frac{\delta'\ \text{coſ.}\ \Phi'}{\text{coſ.}\ \alpha'};\ \text{tang.}\ \theta' = \frac{\text{ſin.}\ \psi'\ \text{tang.}\ \Phi'}{\text{ſin.}\ (\omega + \psi')},$$

$$\text{tang.}\ \zeta' = \frac{\delta'}{\text{coſ.}\ (\alpha' - \Phi')};\ y = \frac{a'\ \text{ſin.}\ \Phi'\ \text{ſin.}\ \zeta'}{\text{ſin.}\ \theta'\ \text{ſin.}\ (\zeta' + \omega)}.$$

Pro tertia obſeruatione:

$$\text{tang.}\ \psi'' = \frac{\delta''\ \text{coſ.}\ \Phi''}{\text{coſ.}\ \alpha''};\ \text{tang.}\ \theta'' = \frac{\text{ſin.}\ \psi''\ \text{tang.}\ \Phi''}{\text{ſin.}\ (\omega + \psi'')},$$

$$\text{tang.}\ \zeta'' = \frac{\delta''}{\text{coſ.}\ (\alpha'' - \Phi'')};\ y = \frac{a''\ \text{ſin.}\ \Phi''\ \text{ſin.}\ \zeta''}{\text{ſin.}\ \theta''\ \text{ſin.}\ (\zeta'' + \omega)}.$$

§. 9.

§. 9. Quodſi autem nunc poſitio lineae nodorum et inclinatio orbitae ad eclipticam vt incognitae ſpectentur, illae expreſſiones inuoluent duas quantitates incognitas principales, angulos ſcilicet $\Omega S T = \Phi$ et $C P Z = \omega$, ad quas determinandas duabus aequationibus opus erit. Hunc in finem referat Π perihelium Cometae, cuius diſtantia a Sole vocetur $S \Pi = p$, ita vt ſemiparameter orbitae parabolicae ſit $= 2p$; ſitque angulus $\Omega S \Pi = \mu$, erit anomalia, ſiue angulus $\Pi S Z = \theta - \mu$, vnde ex natura Parabolae erit diſtantia Solis a Cometa, hoc eſt

Tab. VI. Fig. 5.

$$S Z = y = \frac{2p}{1 + \operatorname{cof.}(\theta - \mu)} = \frac{p}{\operatorname{cof.} \frac{1}{2}(\theta - \mu)^2};$$

vnde colligitur:

Ex prima obſeruatione: $\operatorname{cof.} \frac{1}{2}(\theta - \mu) = \sqrt{\frac{p}{y}}$.

Ex ſecunda obſeruatione: $\operatorname{cof.} \frac{1}{2}(\theta' - \mu) = \sqrt{\frac{p}{y'}}$.

Ex tertia obſeruatione: $\operatorname{cof.} \frac{1}{2}(\theta'' - \mu) = \sqrt{\frac{p}{y''}}$.

§. 10. Harum aequationum ſecunda et tertia diuidantur per primam et prodibunt ſequentes expreſſiones:

$$\frac{\operatorname{cof.} \frac{1}{2}(\theta' - \mu)}{\operatorname{cof.} \frac{1}{2}(\theta - \mu)} = \sqrt{\frac{y}{y'}}; \quad \frac{\operatorname{cof.} \frac{1}{2}(\theta'' - \mu)}{\operatorname{cof.} \frac{1}{2}(\theta - \mu)} = \sqrt{\frac{y}{y''}};$$

quas hoc modo repraeſentemus:

$$\frac{\operatorname{cof.} \frac{1}{2}\theta' + \operatorname{fin.} \frac{1}{2}\theta' \operatorname{tang.} \frac{1}{2}\mu}{\operatorname{cof.} \frac{1}{2}\theta + \operatorname{fin.} \frac{1}{2}\theta \operatorname{tang.} \frac{1}{2}\mu} = \sqrt{\frac{y}{y'}};$$

$$\frac{\operatorname{cof.} \frac{1}{2}\theta'' + \operatorname{fin.} \frac{1}{2}\theta'' \operatorname{tang.} \frac{1}{2}\mu}{\operatorname{cof.} \frac{1}{2}\theta + \operatorname{fin.} \frac{1}{2}\theta \operatorname{tang.} \frac{1}{2}\mu} = \sqrt{\frac{y}{y''}};$$

ex quarum vtraque deducitur valor pro $\operatorname{tang.} \frac{1}{2}\mu$, quibus inter ſe aequatis prodit haec aequatio:

$$\frac{\text{cof.}\frac{1}{2}\theta'.\sqrt{y'}-\text{cof.}\frac{1}{2}\theta.\sqrt{y}}{\text{fin.}\frac{1}{2}\theta.\sqrt{y}-\text{fin.}\frac{1}{2}\theta'.\sqrt{y'}}=\frac{\text{cof.}\frac{1}{2}\theta''.\sqrt{y''}-\text{cof.}\frac{1}{2}\theta.\sqrt{y}}{\text{fin.}\frac{1}{2}\theta.\sqrt{y}-\text{fin.}\frac{1}{2}\theta''.\sqrt{y''}};$$

fiue, fi breuitatis gratia ponatur

$$\text{fin.}\tfrac{1}{2}\theta.\sqrt{y}=P;\ \text{fin.}\tfrac{1}{2}\theta'.\sqrt{y'}=P';\ \text{fin.}\tfrac{1}{2}\theta''.\sqrt{y''}=P'';$$

$$\text{cof.}\tfrac{1}{2}\theta.\sqrt{y}=Q;\ \text{cof.}\tfrac{1}{2}\theta'.\sqrt{y'}=Q';\ \text{cof.}\tfrac{1}{2}\theta''.\sqrt{y''}=Q'';$$

erit $\frac{Q'-Q}{P-P'}=\frac{Q''-Q}{P-P''}$, quae aequatio abit in hanc:

$$PQ'-P'Q+P'Q''-P''Q'+P''Q-PQ''=0,$$

quae iam non amplius a Parabola pendet, fed tantum inuoluit elementa principalia, diftantias fcilicet y, y', y'', cum angulis θ, θ', θ'', quae fi in calculo retineantur, aequatio illa, per crucem multiplicando, ad hanc formam fatis concinnam redigitur:

$$0=\text{fin.}\tfrac{1}{2}(\theta'-\theta).\sqrt{yy'}+\text{fin.}\tfrac{1}{2}(\theta''-\theta').\sqrt{y'y''}$$
$$+\text{fin.}\tfrac{1}{2}(\theta-\theta'').\sqrt{y''y}.$$

§. 11. Hoc igitur modo nacti fumus vnam aequationem, ex qua videndum eft vtrum altera binarum, quas inuoluit, incognitarum, veluti inclinatio orbitae ω, erui queat. Pro determinatione alterius incognitae Φ infuper alia aequatione erit opus, ad quam obtinendam tempus, cuius hactenus nulla ratio eft habita, in computum ducendum erit. Hunc in finem ponatur tempus, quo Cometa ex puncto Z in Z′ peruenerit $=\Theta$, et tempus quo interuallum ZZ″ percurrit $=\Theta'$, areae vero fint

$$ZSZ'=\Delta \text{ et } ZSZ''=\Delta',$$

et quia tempora funt in ratione arearum defcriptarum, habebimus has duas aequationes:

$$\Delta=\varepsilon\,\Theta \text{ atque } \Delta'=\varepsilon\,\Theta'.$$

§. 12.

§. 12. Quoniam autem, definita per ſuperiorem aequationem inclinatione orbitae ω, vnica tantum determinanda ſupererat incognita Φ, altera harum aequationum ſuperflua videri poteſt. Ex vtraque enim idem valor pro poſitione lineae nodorum Φ prodire deberet, quodſi ſecus euenerit, id ſignum erit, orbitam Cometae non eſſe Parabolam, ſed Ellipſin, ſiue Hyperbolam. Ex quo patet, ſtatim ab initio loco Parabolae ſectionem conicam quamcunque introduci potuiſſe. Quia enim tum inſuper excentricitas orbitae in calculum ingreditur, aequatio illa pro ſuperflua viſa ei determinandae vtique inſeruire poteſt.

§. 13. Supereſt vt oſtendamus, quomodo datis duabus Cometae a Sole diſtantiis SZ, SZ', vna cum angulo deſcripto ZSZ', area $ZSZ' = \Delta$ et tempus Θ definiri queant. Hunc in finem ex puncto Z in rectam ΠS demittatur perpendiculum ZP, et poſita, vt hactenus, anomalia, ſiue angulo $\Pi SZ = \theta - \mu$, et diſtantia $SZ = y$, erit

Tab. VI Fig. 6.

$$ZP = y \sin.(\theta - \mu) \text{ et } SP = y \cos.(\theta - \mu),$$

hinc

$$\Pi P = p - y \cos.(\theta - \mu),$$

vnde fit

$$\text{Area } \Pi PZ = \tfrac{2}{3}\Pi P.PZ = \tfrac{2}{3} y \sin.(\theta - \mu)(p - y \cos.(\theta - \mu))$$
$$\text{Area } SPZ = \tfrac{1}{2} PS.PZ = \tfrac{1}{2} y \cos.(\theta - \mu)\, y \sin.(\theta - \mu),$$

quarum ſumma praebet aream ſectoris parabolici

$$\Pi SZ = y \sin.(\theta - \mu)(\tfrac{2}{3} p - \tfrac{1}{6} y \cos.(\theta - \mu)).$$

Eſt vero

$$2p = y + y \cos.(\theta - \mu),$$

vnde

vnde fit

Area $\Pi S Z = \frac{1}{6} y y \sin. (\theta - \mu)(2 + \cos. (\theta - \mu))$

eodemque modo deprehenditur fore aream sectoris

$$\Pi S Z' = \frac{1}{6} y' y' \sin. (\theta' - \mu)(2 + \cos. (\theta' - \mu)).$$

§. 14. Ad angulum μ elidendum, cum sit angulus $Z S Z' = \Pi S Z' - \Pi S Z$, ponatur

$$(\theta' - \mu) - (\theta - \mu) = \theta' - \theta = 2\nu,$$

eritque

$$\tfrac{1}{2}(\theta' - \mu) = \tfrac{1}{2}(\theta - \mu) + \nu \text{ et } \tfrac{1}{2}(\theta - \mu) = \tfrac{1}{2}(\theta' - \mu) - \nu.$$

Statuatur iam

$$\frac{\cos. \frac{1}{2}(\theta' - \mu)}{\cos. \frac{1}{2}(\theta - \mu)} = \sqrt{\frac{y}{y'}} = \frac{1}{u}, \text{ et ob}$$

$$\cos. \tfrac{1}{2}(\theta - \mu) = u \cos. \tfrac{1}{2}(\theta' - \mu), \text{ erit}$$

$$\cos. \tfrac{1}{2}(\theta - \mu) = u \cos. \tfrac{1}{2}(\theta - \mu) \cos. \nu - u \sin. \tfrac{1}{2}(\theta - \mu) \sin. \nu,$$

vnde fit

$$\text{tang.} \tfrac{1}{2}(\theta - \mu) = \frac{u \cos. \nu - 1}{u \sin. \nu},$$

consequenter

$$\sin. \tfrac{1}{2}(\theta - \mu) = \frac{u \cos. \nu - 1}{z} \text{ et } \cos. \tfrac{1}{2}(\theta - \mu) = \frac{u \sin. \nu}{z},$$

posito breuitatis gratia

$$\sqrt{(u u + 1 - 2 u \cos. \nu)} = z.$$

Hinc erit

$$\sin. (\theta - \mu) = \frac{2 u \sin. \nu (u \cos. \nu - 1)}{z z} \text{ et}$$

$$\cos. (\theta - \mu) = \frac{2 u u \sin. \nu^2 - z z}{z z},$$

adeoque

$$2 + \cos. (\theta - \mu) = \frac{2 u u \sin. \nu^2 + z z}{z z},$$

hisque valoribus substitutis fiet area sectoris

$$\Pi S Z = \frac{y y u \sin. \nu (u \cos. \nu - 1)(2 u u \sin. \nu^2 + z z)}{3 z^4}.$$

§. 15.

§. 15. Pro altero sectore $\Pi S Z'$, cum sit

$$\operatorname{cos.} \tfrac{1}{2}(\theta' - \mu) = \tfrac{1}{u} \operatorname{cos.} \tfrac{1}{2}(\theta - \mu),$$

habebimus

$$\operatorname{cos.} \tfrac{1}{2}(\theta' - \mu) = \tfrac{1}{u} \operatorname{cos.} \tfrac{1}{2}(\theta' - \mu) \operatorname{cos.} \nu + \tfrac{1}{u} \operatorname{sin.} \tfrac{1}{2}(\theta' - \mu) \operatorname{sin.} \nu,$$

vnde fit

$$\operatorname{tang.} \tfrac{1}{2}(\theta' - \mu) = \frac{u - \operatorname{cos.} \nu}{\operatorname{sin.} \nu},$$

proinde

$$\operatorname{sin.} \tfrac{1}{2}(\theta' - \mu) = \frac{u - \operatorname{cos.} \nu}{z} \text{ et } \operatorname{cos.} \tfrac{1}{2}(\theta' - \mu) = \frac{\operatorname{sin.} \nu}{z},$$

vnde porro conficitur

$$\operatorname{sin.} (\theta' - \mu) = \frac{2 \operatorname{sin.} \nu (u - \operatorname{cos.} \nu)}{z z} \text{ et}$$

$$\operatorname{cos.} (\theta' - \mu) = \frac{2 \operatorname{sin.} \nu^2 - z z}{z z},$$

ita vt sit

$$2 + \operatorname{cos.} (\theta' - \mu) = \frac{2 \operatorname{sin.} \nu^2 + z z}{z z},$$

quibus valoribus substitutis maioris sectoris area erit

$$\Pi S Z' = \frac{y' y' \operatorname{sin.} \nu (u - \operatorname{cos.} \nu)(2 \operatorname{sin.} \nu^2 + z z)}{3 z^4}.$$

§. 16. Iam cum sit $\frac{y}{y'} = \frac{1}{u u}$, erit $y' = u u y$, hinc

$$y' y' = u u y y' \text{ et } y y = \frac{y y'}{u u},$$

quibus substitutis area quaesita

$$Z S Z' = \Delta = \Pi S Z' - \Pi S Z,$$

sequenti modo erit expressa:

$$\Delta = \frac{2 u u y y' \operatorname{sin.} \nu^3 (u - \operatorname{cos.} \nu)}{3 z^4} + \frac{u u y y' \operatorname{sin.} \nu (u - \operatorname{cos.} \nu)}{3 z z}$$
$$- \frac{2 u y y' \operatorname{sin.} \nu^3 (u \operatorname{cos.} \nu - 1)}{3 z^4} - \frac{y y' \operatorname{sin.} \nu (u \operatorname{cos.} \nu - 1)}{3 u z z},$$

cuius expressionis membra priora reducuntur ad

$$\frac{2 u y y' \operatorname{sin.} \nu^3}{3 z^4} (u u - 2 u \operatorname{cos.} \nu + 1) = \frac{2 u y y' \operatorname{sin.} \nu^3}{3 z z};$$

posteriora vero abeunt in hanc formam:

$$\frac{yy'\,\text{fin.}\,\nu}{3uzz}(u^4 - u^3\,\text{cof.}\,\nu - u\,\text{cof.}\,\nu + 1),$$

ad quam si addatur prior ad eundem denominatorem vocata, hoc est

$$\frac{2uuyy'\,\text{fin.}\,\nu^3}{3uzz} = \frac{yy'\,\text{fin.}\,\nu}{3uzz}(2uu - 2uu\,\text{cof.}\,\nu^2),$$

prodit

$$\Delta = \frac{yy'\,\text{fin.}\,\nu}{3uzz}\{(uu+1)^2 - u(uu+1)\,\text{cof.}\,\nu - 2uu\,\text{cof.}\,\nu^2\}$$

siue

$$\Delta = \frac{yy'\,\text{fin.}\,\nu}{3uzz}(uu + 1 - 2u\,\text{cof.}\,\nu)(uu + 1 + u\,\text{cof.}\,\nu)$$

siue

$$\Delta = \frac{yy'\,\text{fin.}\,\nu\,(uu + 1 + u\,\text{cof.}\,\nu)}{3u}.$$

Restituto denique loco u valore $\sqrt{\frac{y'}{y}}$, habebimus pro area quaesita ZSZ' hunc valorem:

$$\Delta = \tfrac{1}{3}\sqrt{yy'}.\,\text{fin.}\,\nu\,(y + y' + \sqrt{yy'}.\,\text{cof.}\,\nu).$$

§. 17. Quodsi iam tempus, quo Cometa intervallum ZZ' percurrit, littera Θ designetur, ex Theoria motus Planetarum constat fore $\Delta = \frac{1}{2}\Theta\sqrt{2p}$, siquidem distantia media Terrae a Sole vnitati sumitur aequalis. Erit igitur $\Theta = \frac{2\Delta}{\sqrt{2p}}$, hoc est:

$$\Theta = \frac{2}{3\sqrt{2p}}\sqrt{yy'}.\,\text{fin.}\,\nu\,(y + y' + \sqrt{yy'}.\,\text{cof.}\,\nu).$$

Est vero

$$2p = y + y\,\text{cof.}\,(\vartheta - \mu) = y + y\frac{(2u^2\,\text{fin.}\,\nu^2 - zz)}{zz}$$

siue

$$2p = \frac{2yuu\,\text{fin.}\,\nu^2}{zz} = \frac{2yy'\,\text{fin.}\,\nu^2}{y + y' - 2\sqrt{yy'}\,\text{cof.}\,\nu},$$

quo valore substituto tempus quaesitum erit

$$\Theta = \frac{\sqrt{2}}{6}(y + y' + \sqrt{yy'}.\,\text{cof.}\,\nu)\sqrt{(y + y' - 2\sqrt{yy'}.\,\text{cof.}\,\nu)};$$

quae

quae expressio temporis ea ipsa est, quam Celeb. *Lambert* in tractatu: Insigniores Orbitae Cometarum proprietates §. 79, exhibuit.

§. 18. Ceterum pro determinanda orbita parabolica Cometae haud superfluum erit notasse, si angulus Z S Z' fuerit quam minimus, semper fore

$$y(y'-y)^2 = 2\,\Theta^2 - 4\,y\,y'\,y'\,\nu\,\nu.$$

Nam

$$y = \frac{2p}{1+\text{cos.}(\theta-\mu)} \text{ et } y' = \frac{2p}{1+\text{cos.}(\theta'-\mu)},$$

ergo

$$\text{cos.}(\theta-\mu) = \frac{2p}{y} - 1 \text{ et cos.}(\theta'-\mu) = \frac{2p}{y'} - 1.$$

Est vero $\theta' - \mu = \theta - \mu + 2\nu$, consequenter:

$$\text{cos.}(\theta'-\mu) = \text{cos.}(\theta-\mu) - 2\nu\,\text{sin.}(\theta-\mu).$$

Hinc igitur differentia binarum aequationum:

$$\text{cos.}(\theta-\mu) = \frac{2p}{y} - 1$$

$$\text{cos.}(\theta-\mu) - 2\nu\,\text{sin.}(\theta-\mu) = \frac{2p}{y'} - 1$$

dat : $2\nu\,\text{sin.}(\theta-\mu) = \frac{2p(y'-y)}{y\,y'}$

at : $2\nu\,\text{cos.}(\theta-\mu) = \frac{4\nu p}{y} - 2\nu,$

hinc summa quadratorum praebet:

$$4\nu\nu = \frac{4pp(y'-y)^2}{y\,y\,y'\,y'} + \frac{16\nu\nu pp}{y\,y} - \frac{16\nu\nu p}{y} + 4\nu\nu,$$

quae aequatio reducitur ad hanc:

$$\frac{p(y'-y)^2}{y\,y'\,y'} + \frac{4\nu\nu p}{y} - 4\nu\nu = 0.$$

Cum autem sit area minimi sectoris

$$Z\,S\,Z' = \tfrac{1}{2}\,S\,Z.\,V\,Z' = \tfrac{1}{2}\,\Theta\,\sqrt{2p}, \text{ erit}$$

$$\tfrac{1}{2}\,y\,y'\,\text{sin.}\,2\nu = \nu\,y\,y' = \tfrac{1}{2}\,\Theta\,\sqrt{2p},$$

 ideoque

ideoque

$$p = \frac{2\nu\nu y y y' y'}{\Theta\Theta},$$

quo ſubſtituto aequatio illa fiet

$$\frac{8\nu\nu y (y' - y)^2}{\Theta\Theta} + \frac{8\nu^4 y y' y'}{\Theta\Theta} - 4\nu\nu = 0,$$

proinde

$$y (y' - y)^2 = 2\Theta\Theta - 4\nu\nu y y' y'.$$

Haec aequatio examini inſeruire poteſt, quod circa diſtantias y et y', ex certa quadam hypotheſi deductas, inſtitui debet. Si enim earum valores huic aequationi ſatisfaciant, ſignum eſt eas rite eſſe determinatas; ſi ſecus euenerit, alia hypotheſis fingenda eſt, donec aequationi modo inuentae ſatisfiat. Ceterum notandum eſt, tempus ex illa aequatione ita definiri, vt ſit

$$\Theta = \sqrt{\tfrac{y}{2}} . \sqrt{((y' - y)^2 + 4\nu\nu y y)}, \text{ ſiue}$$

$$\Theta = \sqrt{\tfrac{SZ}{2}} . \sqrt{(VZ^2 + VZ'^2)} = ZZ' \sqrt{\tfrac{1}{2} SZ}.$$

Euolutio caſus.

ab Illuſtri Evlero tractati.

Act. T. IV. P. I.

Tab. VI. Fig. 5.

§. 19. Si in duobus locis obſeruatis latitudo fuerit nulla, ideoque $\delta = 0$ et $\delta' = 0$, pro prima obſeruatione erit tang. $\theta = 0$, ideoque angulus ☊ S Z $= \theta = 0$. Cometa igitur tum fuit in linea nodorum in puncto ☊, eiusque diſtantia a Sole S ☊ $= f$, ob valorem ex §. 6. deſumtum

$y =$

$$y = \frac{\delta\, a\, \sin.\Phi}{\sin.\theta\, \sin.\omega\, \cos.(\alpha - \Phi)},$$

si ob θ infinite paruum ponatur:

$$\sin.\theta = \text{tang.}\,\theta = \frac{\delta\, \sin.\Phi}{\cos.\alpha\, \sin.\omega},\ \text{erit}$$

$$S☊ = f = \frac{a\, \cos.\alpha}{\cos.(\alpha - \Phi)}.$$

Pro secunda obseruatione, vbi $\delta' = 0$, erit pariter tang. $\theta = 0$, ideoque, quia Cometa interea ad alteram partem lineae nodorum pertigit in ☋, erit $\theta' = ☊ S ☋ = 180°$ et distantia Cometae a Sole

$$S☋ = g = \frac{a'\, \cos.\alpha'}{\cos.(\alpha' - \Phi')}.$$

§. 20. Quodsi autem introducatur angulus $☊ S \Pi = \mu$ et Parameter orbitae parabolicae $4p$, seu distantia Perihelii $S\Pi = p$, erit (ex §. 9.)

$$f = \frac{p}{\cos.\frac{1}{2}\mu^2}\ \text{et}\ g = \frac{p}{\sin.\frac{1}{2}\mu^2},$$

vnde fit

$$☊☋ = f + g = \frac{p}{\cos.\frac{1}{2}\mu^2\, \sin.\frac{1}{2}\mu^2} = \frac{4p}{\sin.\mu^2}.$$

Porro ex §. 16. ob angulum

$$\theta' - \theta = 2\nu = 180°\ \text{et}\ \nu = 90,$$

deducitur area

$$☊ S ☋ = \tfrac{1}{3}(f+g)\sqrt{fg} = \frac{8pp}{3\sin.\mu^3},$$

et tempus, quo Cometa ex ☊ fertur in ☋ erit

$$\frac{\sqrt{2}}{3}(f+g)^{\frac{3}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{3}\,\frac{8p\sqrt{p}}{\sin.\mu^3} = \Theta,$$

 vnde

vnde fit

$$(f+g) = \frac{a \cos.\alpha}{\cos.(\alpha - \Phi)} + \frac{a' \cos.\alpha'}{\cos.(\alpha' - \Phi)} = \overset{c}{V} : \Theta\,\Theta,$$

ex qua aequatione, vnicam tantum incognitam Φ complectente, hic angulus Φ, ſeu poſitio lineae nodorum facile definitur, ope methodi ab Ill. *Eulero* in Diſſertatione citata traditae.

EPITOME

EPITOME
OBSERVATIONVM ASTRONOMICARVM
PRO
DETERMINANDA POSITIONE VRBIS LVBNY ANNO 1782 INSTITVTARVM.

Auctore

PETRO INOCHODZOW.

Verificatione Quadrantis ad horizontem ter instituta, reperi errorem ipsius subtractiuum 5'. 36", 5'. 41" et 5'. 39"., quem rotunde assumere licet 5'. 40". Caeterum eadem hic repetenda veniunt, quae ante hac de obseruationibus in Orel et Neschin factis praefata sunt: id vnum notandum arbitror, altitudines Solis et stellarum fixarum errore instrumenti iam mulctatas esse, tabulam refractionis D. *de la Caille* adhibitam, et in computu declinationis Solis differentiam meridianorum Parisini et Lubnensis duarum horarum suppositam.

Altitu-

Altitudines Solis meridianae.

Dies obſ. St. nou.	alt. obſeru.	Refract. — Parall.	ſemid. ☉	Declin. ☉ Boreal.	Latitudo.
20 Maii	60°. 18′. 34″	0′. 34″	15′. 50″	20°. 2′. 45″	50°. 0′. 35″
23	60. 54. 20	33	- -	20 38. 30	33
24	61. 5. 30	- -	49½	20 49. 44	36½
27	61. 37. 15	32	49	21 21. 14	20
29	61. 56. 20	31	- -	21 40. 24	24
3 Iunii	62. 37. 40	- -	48	22 21. 42	21
10	63. 19. 0	30	47½	23 3. 6	26½
12	63. 26. 56	29	47	23 11. 18	38
13	63. 30. 30	- -	- -	23 14. 48	34
14	63. 33. 42	- -	- -	23 17. 54	28
17	63. 40. 20	28	- -	23 24. 42	37
21	63. 43. 44	- -	- -	23 27. 58	29
23	63. 42. 52	- -	- -	23 27. 6	29
25	63. 40. 20	- -	46½	23 24. 37	31½
27	63. 36. 20	29	- -	23 20. 29	24½
28	63. 33. 25	- -	- -	23 17. 48	38½
29	63. 30. 20	- -	- -	23 14. 42	37½
30	63. 27. 6	- -	- -	23 11. 13	23
1 Iulii	63. 22. 57	- -	- -	23 7. 18	37½
4	63. 8. 43	30	47	22 53. 10	44
5	63. 3. 10	- -	- -	22 47. 39	46
6	62. 57. 25	- -	- -	22 21. 44	36
7	62. 51. 2	- -	- -	22 35. 26	41
13	62. 5. 10	31	- -	21 49. 29	37
14	61. 56. 9	- -	- -	21 40. 31	40
15	61. 46. 45	32	- -	21 31. 10	44
18	61. 16. 28	33	- -	21 0. 54	46
21	60. 43. 5	- -	- -	20 27. 27	42
22	60. 31. 26	34	47½	20 15. 35½	31
31	58. 30. 5	37	15. 48½	18 11. 17	37½

Medium ex omnibus 50. 0 34.

Alti-

Altitudines ſtellarum fixarum.

Dies obſ. St. Nou.	Nomina fixarum.	alt. obſeru.	refract.	Declinat. appar.	Latitudo.
19 Maii	β Leonis	55°.47'.29"	0'.45"	15°.47'.27"	50°. 0'.43'
20	δ Virgin.	44. 35. 40	1. 7	4. 35. 8	35
	ε - -	52. 8. 10	0. 52	12. 8. 2	44
	θ - -	35. 38. 16	1. 33	4. 22. 25	52
	ζ - -	40. 31. 52	1. 17	0. 31. 16	41
	Arctur.	60. 19. 6	0. 38	29. 19. 13	45
22	Arctur.	60. 19. 3	- -	- - -	48
31	α Virgin.	29. 59. 43	1. 54	10. 1. 14	57
	Arctur.	60. 19. 20	0. 38	20. 19. 15	33
3 Iun.	ζ Virgin.	40. 31. 46	1. 17	0. 31. 7	38
	Arctur.	60. 19. 20	} 0. 38	20. 19. 15	33
6	- - -	60. 19. 15			38
7	- - -	60. 19. 3			50
	α Coronae	67. 27. 26	0. 28	27. 27. 30	52
12	Arctur.	60. 19. 0	0. 38	20. 19. 16	54
	ε Bootis	68. 0. 0	0. 27	28. 0. 4	31
	δ - -	74. 7. 55	0. 19	34. 8. 15	39
	α Coronae	67. 27. 25	0. 28	27. 27. 31	34
	β ſerpent.	56. 6. 40	0. 45	16. 6. 50	55
15	Arctur.	60. 19. 12	0. 38	20. 19. 16	42
	ζ Boot.	54. 40. 22	0. 47	14. 40. 21	46
17	Arctur.	60. 19. 5	0. 38	20. 19. 16	49
	ε Boot.	67. 59. 45	0. 27	28. 0. 5	47
	δ - -	74. 7. 52	19	34. 8. 16	43
	α Coron.	67. 27. 20	28	27. 27. 32	40
28	δ Bootis.	74. 7. 55	19	34. 8. 18	42
	α Coron.	67. 27. 26	0. 28	27. 27. 34	36

 Dies

Dies obſ. St. Nou.	Nomina fixarum.	alt. obſeru.	refract.	Declinat. appar.	Latitudo.
28 Iun.	α Serpent.	47°. 7'.40"	1'. 2"	7°. 7'.19"	50°. 0'.41"
	β - -	56. 6. 50	0. 45	16. 6. 51	46
	γ Hercul.	59. 40. 20	39	19. 40. 32	51
	β Hercul.	61. 58. 15	35	21. 58. 32	52
6 Iul.	α Coron.	67. 27. 30	28	27. 27. 36	34
	γ Hercul.	59. 40. 23	39	19. 40. 33	49
	β Hercul.	61. 58. 30	0. 35	21. 58. 34	39
				Medium	50. 0. 40

Hinc patet, latitudinem vrbis Lubny tuto ſtatui poſſe 50°. 0'. 37''.

Obſeruationes eclypſium ſatellitum Iouis pro inueſtiganda longitudine eiusdem vrbis. Momenta temporis vera reperta ſunt per altitudines Solis correſpondentes.

I. $\frac{6}{17}$ Maii Immerſio 2^{di} ſatellitis 12^h.4'.48''. T. V.

Aëre vaporoſo faſciae confuſe videbantur; ſatelles ante indicatum momentum ſaepe diſparuit

II. $\frac{9}{20}$ Maii Immerſio 1^{mi} ſatellitis.

Satelles difficulter videtur	11. 6. 5
Immerſio totalis	11. 6. 40
Eandem notauit ſocius	11. 7. 0

Sub iisdem circumſtantiis ac praecedens obſeruatio, faſciae mediocriter videbantur. Altitudo planetae poſt 10 min. prim. erat 9°. 33'.

III.

III. $\frac{13}{24}$ Maii Immersio 2^{di} satellitis.
Lumen satellitis valde imminutum $14^h. 38'. 50''$ T.v.
Immersio totalis 14. 39. 6
Coelo sereno fasciis bene conspicuis
obseru. bona. Alt. ♃ post obseru. $16^o. 46'$.

IV. $\frac{1}{12}$ Iun. Immersio 1^{mi} Sat. 11. 13. 35
Eadem a socio 11. 14. 0
Coelo sereno et fasciis bene conspicuis,
sed Ioue circa oppositionem cum sole versante, satelles disco ipsius proximus modo videbatur, modo abscindebatur; obseru. dubia.

V. $\frac{10}{21}$. Emersionem 1^{mi} satellitis inter nubium hiatus obseruare mihi visus 9. 48. 51
obseruatio haec valde dubia.

VI. $\frac{17}{28}$. Iun. Emersio 1^{mi}. satellitis 11. 42. 6
Eadem a socio 11. 42. 25
Coelo sereno et tranquillo, fasciae bene videbantur, satelles Ioui proximus.

VII. $\frac{25 \text{ Iun.}}{6 \text{ Iul.}}$. Emersio 2^{di} satellitis 8. 35. 8
Coelo sereno fasciis bene conspicuis
obseru. bona.

VIII. $\frac{3}{14}$. Iul. Emers. 1^{mi}. satell. 9. 57. 18
Aëre sereno et tranquillo fasciae bene videbantur.

IX. $\frac{9}{20}$. Iul. Immerſio 3^{tii} ſatell.		$8^h. 31'. 29''$ T.v.
Coelo ſereno et tranquillo faſciis diſtincte conſpicuis		
2^{dus} ſatell. poſt diſcum Iouis occultatus		9. 13. 15
X. - - Emerſio 3^{tii} ſatellitis		11. 18. 24
faſciae paulo obſcurius videbantur ac in priori obſeruatione		
1^{mus} ſatelles in diſcum Iouis intrare mihi videbatur		11. 29. 23
XI. $\frac{10}{21}$ Iulii Emerſio 1^{mii} ſatell.		11. 51. 49
Coelo ſereno, faſciis mediocriter conſpicuis et Luna vicina; nihilo minus obſeruatio haec bona mihi videbatur.		
XII. $\frac{19}{30}$. Iul. Emerſio 1^{mi} ſatell.		8. 15. 41
Coelo ſereno faſciae bene videbantur, altitudo planetae poſt obſeru.		$17°. 12\frac{1}{3}'$.
XIII. $\frac{27\ \text{Iul.}}{6\ \text{Aug.}}$ Emerſio 2^{di} ſatell.		8. 10. 0
Aëre ſereno et tranquillo, faſciis mediocriter conſpicuis, attamen bona videbatur.		

Omnes hae obſeruationes inſtitutae a me Teleſcopio Schorti 30 pollicum, et tres a ſocio tubo Dollondiano.

Facta comparatione obſeruationum 1^{mi} et 2^{di} Satellitum cum ephemeridibus, inuenitur differentia meridianorum inter Lutetias Pariſiorum et vrbem Lubny.

Ex

Ex immersionibus				Ex emersionibus			
N°. I.	2^h.	$1'$.	$19''$	N°. VII.	2^h.	$2'$.	$52''$.
II.	2.	1.	46	VIII.	-	-	39
III.	2.	2.	0	XI.	-	-	31
				XII.	-	-	12
				XIII.	-	-	19
med.	2.	1.	41	med.	2.	2.	28

Ex quibus colligitur differentia meridianorum - - - - - - 2^h. $2'$. $4\frac{1}{2}''$.

Declinatio acus magneticae

$\frac{7}{18}$ Maii	9^0.	$0'$	a septentrione ad occasum
$\frac{14}{25}$ - -	9.	0	
$\frac{16}{27}$ - -	9.	7	
$\frac{24 \text{ Maii}}{4 \text{ Iun.}}$	9.	5	
$\frac{2}{13}$ - -	9.	4	
$\frac{7}{18}$ - -	9.	5	
$\frac{2}{13}$ - -	9.	15	
med.	9.	5.	

EPITOME
OBSERVATIONVM METEOROLOGICARVM PETROPOLI ANNO MDCCLXXX. SECVNDVM CALENDARIVM GREGORIANVM INSTITVTARVM.

Auctore

IOANNE ALBERTO EVLER.

I. Barometrum.

1. Barometri altitudines maximae, minimae et mediae, vna cum variatione maxima et statu medio, pro singulis mensibus anni 1780.

Mense	Altitudo maxima			Altitudo minima			Variatio	Medium	Alt. med.
	Dig. p. c.	die	hora	Dig. p. c.	die	hora	Dig. p. c.	Dig. p. c.	Dig. p. c.
Ianuar.	28. 78	27.	3. p. m	27. 19	11.	9. p. m.	1. 59	27. 98	28. 00
Februar.	28. 98	9.	meridie.	27. 32	26.	9. a. m.	1. 66	28. 15	27. 96
Mart.	28. 33	21.	2. p. m.	27. 17	11.	6 a. m.	1. 16	27. 75	27. 74
April.	28. 58	22.	12. p. m	27. 40	7.	9. a. m.	1 18	27. 99	27. 89
Maii	28. 23	15.	{ 0. a. m. meridie.	27. 61	19.	9. a. m.	0. 62	27. 92	28. 01
Iunii	28. 17	20.	meridie.	27. 23	5.	9. a. m.	0. 94	27. 70	27. 89
Iulii	28. 28	4. 19.	9. a. m. 6. a. m.	27. 62	8.	10. a. m.	0. 66	27. 95	28. 01
Augusti	28. 48	21.	meridie	27. 76	25.	12. p. m	0. 72	28. 12	28. 16
Sept.	28. 53	18. 19.	10. a. m. 9. a. m.	27. 27	2.	6. a. m.	1. 26	27. 90	28. 11
Octobr.	28. 64	28. 29.	11. a. m. meridie.	27. 12	2.	3. p. m	1. 52	27. 88	28. 03
Nouembr.	28. 53	29.	3. p. m.	27. 37	13.	3. p. m.	1. 16	27. 95	27. 95
Decembr.	28. 82	19.	meridie.	27. 34	9.	11. p. m	1. 48	28. 08	28. 15
Anno 1780.	28. 98	Mense Februarii.		27. 12	Mense Octobris.		1. 86	28. 05	28. 00

2. Nu-

2. Numerus dierum, quibus altitudo Barometri superabat terminos quosdam circa altitudinem 28 poll.

Mense	supra 28. 20 Dies, horae	supra 28. 10 Dies, horae	supra 28. 00 Dies, horae	supra 27. 90 Dies, hora	supra 27. 80 Dies, horae	per dimidium mensis supra Dig. p. c.
Ian.	7. 3	11. 3	16. 3	18. 3	20. 21	28. 01
Febr.	6. 3	6. 12	12. 0	15. 12	19. 6	27. 93
Mart.	1. 15	3. 3	5. 18	8. 18	14. 3	27. 75
April.	1. 18	3. 6	7. 9	14. 6	20. 3	27. 89
Maii	2. 0	8. 9	19. 18	22. 21	27. 6	28. 03
Iunii	0. 0	2. 3	11. 6	17. 9	21. 12	27. 92
Iulii	6. 12	12. 12	17. 6	21. 15	24. 9	28. 05
Aug.	15. 6	19. 21	23. 6	27. 6	30. 12	28. 19
Sept.	16. 0	19. 21	22. 12	24. 6	25. 21	28. 25
Oct.	10. 0	14. 0	18. 15	21. 0	23. 18	28. 07
Nou.	8. 18	10. 6	13. 6	15. 12	18. 9	27. 92
Dec.	14. 3	16. 9	19. 6	23. 3	26. 15	28. 13
Anno 1780.	89. 6	127. 9	186. 9	229 15	272. 15	28. 01

Duae priores figurae altitudinum barometricarum pollices integros designant, quorum duodecim pedem regium parisinum constituunt, posteriores vero partes centesimas vnius pollicis.

Porro monendum est a. m. significare *ante meridium*, p. m. verum *post meridiem*.

Colligitur ex his tabulis:

1. Altitudo barometri maxima 28. 98: mense Februarii, die 9, hora meridiana. Thermom. 173. Coelum serenum. Zephirus.

2. Al-

2. Altitudo barometri minima 27. 12; mense Octobris, die 2, hora 3ª. post meridiana. Thermom. Delisl. 136. Coelum obductum. Pluuia. Auster vehemens.

3. Variatio maxima 1. 86 hoc est 1 $\frac{86}{100}$ poll.

4. Medium inter maximam altitudinem et minimam 28. 05.

5. Altitudo inter omnes obseruatas media 28 pollicum parisinorum.

6. Deinde mercurius in tubo barometri se sustentabat supra

28. 20 vel 28 $\frac{1}{5}$ poll. per dies 89 $\frac{1}{4}$.

28. 10 vel 28 $\frac{1}{10}$ poll. per dies 127 $\frac{5}{8}$.

28. 00 vel 28 poll. per dies 186 $\frac{7}{8}$.

27. 90 vel 27 $\frac{9}{10}$ poll. per dies 229 $\frac{5}{8}$.

27. 80 vel 27 $\frac{4}{5}$ poll. per dies 272 $\frac{5}{8}$.

Vnde concluditur mercurium se sustentasse per interuallum dimidii anni vel 183 dierum supra altitudinem 28. 01, hoc est 28 $\frac{1}{100}$ poll, quae altitudo fere aequalis deprehenditur mediae.

De constructione et expositione Barometri nostri, nec non Thermometri vide Volumen I^{mum} horum Actorum pro Anno 1777. P. I. pag. 381.

3. Descen-

3. Descensus et ascensus mercurii in tubo Barometri notabiliores.

Menſe.	Tempore. die. hora.	Diff.	Barom. Dig.p.c.	Diff.	Thermom.	Ventus	Atmosphaera.
		hor.		p. c.			
	1. 6. p. m.	36	28,19	−94	170	NW	coelum nubilum, tum ſeren.
	3. 6. a. m.	24	27,25	+65	172	O fort.	coel. obductum, nix copioſa.
	4. 6. a. m.		27,90		185	N	coelum ſeren. nebula.
	7. 6. a. m.	24	28,10	−53	181	NW	coelum nubilum.
Ian.	8. 6. a. m.		27,57		162	W fort.	coelum obductum.
	9. 2. p. m.	16	28,00	−50	172	N	coel. ſeren.
	10. 6. a. m.	12	27,50	+27	158	NW f.	coel. obd. nix.
	10. 6. p. m.	27	27,77	−58	165	—	coel. ſeren.
	11. 9. p. m.	15	27,19	+46	161	Wproc.	coel. obductum nix.
	12. meridie		27,65		182	NW	coelum ſerenum.
	5. 9. a. m	24	27,65	+22	157	N fort.	coel. obd. nix. nubilum.
	6. 9. a. m.	24	27,87	+38	164	W	coel. obd. nix.
	7. 9. a. m.	24	28,25	+45	160	—	coel. obductum.
	8. 9. a. m.	27	28,70	+28	165	—	coel. obd. nebula, malacia.
	9. meridie	24	28,98	−24	172	—	coel. ſeren. malacia.
Febr.	10. meridie	36	28,74	−54	166	—	coel. ſeren. nubilum.
	11. 12. p. m.		28,20		160	—	coel. obd. malacia, nebula.
	12. 9. p. m.	26	28,32	−70	159	W	coel. obd. malacia.
	13. 11. p. m.		27,62		150	W fort.	nix, pluuia; coel. ſeren.
	24. meridie	21	28,03	−55	164	W	coel. nubil.
	25. 9. a. m.		27,48		155	SO fort	nix. coel. obductum.
	5. meridie	24	28,01	−61	147	SW f.	coelum obductum.
	6. meridie		27,40		149	— proc.	nix.
Mart.	7. 3. a. m.	33	27,20	+67	153	N	coelum obductum.
	8. meridie		27,87		160	— fort.	coel. ſeren.

Descensus et ascensus mercurii in tubo Barometri notabiliores.

Mense.	Tempore. die. hora.	Diff.	Barom. Dig. p. c.	Diff.	Thermom.	Ventus.	Atmosphaera.
	11. 6. a. m.	kor. 21	27,17	p. c. +76	152	W fort.	coel. obduct. nix.
	12. 3. a. m.		27,93		157	W	coel. feren.
	14. meridie	21	27,36	+67	147	W	nix, coel. nubil. tum feren.
	15. 9. a. m.	31	28,03	−55	152	N	coel. nub. tum nix et pluu.
Mart.	16. 4. p. m.		27,48		140	S fort.	coel. nub.
	19. 4. p. m.	24	27,36	+44	144	SW	coel. nub.
	20. 4. p. m.	22	27,80	+53	146	W	coel. obd. deinde feren.
	21. 2. p. m.	30	28,33	−71	150	—	coel. nub. malacia.
	22. 8. p. m.		27,62		147	SW f.	coel. obd. nix, pluuia.
	24. 3. a. m.	24	27,40	+50	150	N	coel. obd. nix.
	25. 3. a. m.	30	27,90	+34	167	—	coel. feren. nebula.
	26. 9. a. m.		28,24		160	—	coel. feren.
	30. 2. a. m.	24	27,85	−66	168	W fort.	coel. nubil.
	31. 2. a. m.		27,19		155	NW f.	coel. obd. nix copiosa.
	1. 9. p. m	43	27,87	+68	158	NW f.	coel. obd.
	3. 9. p. m.	21	28,03	−41	167	NO	coel. feren.
	4. 6. p. m.		27,62		161	Wproc.	nix, coel. obd.
April.	6. meridie	20	27,96	−56	146	S	pluuia, coel. obd.
	7. 8. a. m.	30	27,40	+63	144	— fort.	coel. obd. pluu. nix.
	8. 2. p. m.		28,03		153	NW	coel. nubil.
	23. 6. a. m.	27	28,57	−59	155	SO fort.	coel. nubil. deinde nix et pl.
	24. 9. a. m.		27,98		142	malac.	coel. obd.
	2. 9. a. m	24	28,07	−30	132	W fort.	coel. nubil.
Iunii.	3. 9. a. m.	36	27,77	−53	132	Wproc.	coel. obduct.
	4. 9. p. m.		27,24		138	W fort.	pluuia copiosa, coel. obd.

Des-

Descensus et ascensus mercurii in tubo Barometri notabiliores.

Mense.	Tempore. dies hora.	Diff.	Barom. Dig.p.c.	Diff.	Thermom.	Ventus	Atmosphaera.
Iunii.	5. 9. a. m.	hor. 25	27,23	+57	143	SW. pr.	pluuia et nix, coel. obd.
	6. 10. a. m.		27,80		140	W	coel. obd.
	7. meridie		27,95		130	—	coel. feren. dein nubil.
Aug.	11. meridie	36	28,42	—54	124	NW	coel. feren.
	12. 6. p. m.		27,88		125	W fort.	pluuia cop. coel. obd.
	31. 10. a. m.	22	28,07	—70	130	NW	coel. nubil.
Sept.	1. 8. a. m.		27,37		129	SW f.	pluuia, coel. obd.
	30. 9. a. m.	24	28,07	—40	150	O	nebula, coel. nubil.
Oct.	1. 9. a. m.	30	27,67	—55	142	S	nebula, coel. obd. pluu. cop.
	2. 3. p. m.		27,12		137	S proc.	pluuia, coel. nubil.
	3. 6. a. m.	24	27,17	+56	142	SW f.	coel. nubil. pluuia.
	4. 6. a. m.	32	27,73	+48	144	—	coel. obd.
	5. 2. p. m.		28,21		141	N	coel. obd.
	15. 10. a. m.	18	28,27	—37	148	SW	nebula, coel. nubil. pluuia.
	16. 4. a. m.		27,90		139	W	pluuia coel. obd.
	19. meridie	24	27,91	—56	137	W fort.	coel. obd. pluuia.
	20. meridie		27,35		136	SW f.	pluuia, coel. nubil.
	30. 6. a. m.	24	28,58	—51	154	S	nebula, nix, coel. obd.
	31. 6. a. m.		28,07		146	SW f.	coel. obd. pluuia copiosa.
Nov.	3. 10. a. m.	24	28,47	—42	150	S	coel. serenum.
	4. 10. a. m.	26	28,05	+50	146	SO	coel. obd. dein nubil.
	5. meridie		27,55		147	SO fort.	coel. obd. pluu. cop.

 Des-

Descenſus et aſcenſus mercurii in tubo Barometri notabiliores.

Menſe.	Tempore. die. hora.	Diff.	Barom. Dig. p. c	Diff.	Thermom.	Ventus	Atmosphaera.
		hor.		p. c.			
Nov.	6. 9. a. m	33	27,38	+58	147	S fort.	pluuia copioſa, nix, coel. obd.
	7. 6. p. m.	19	27,96	−53	150	O	coel. nubil.
	8. 1. p. m.	22	27,43	+71	150	O fort.	pluu. cop. coel. obd.
	9. 11. a. m.		28,14		153	NW	coel. ſeren.
	22. 6. p. m.	24	27,67	+18	163	O	coel. obd. nix.
	23. 6. p. m.	30	27,85	+49	151	malac.	coel. obd.
	24. 12. p. m.		28,34		151	S	nix, coel. obd.
Dec.	2. 9. a. m.	18	28,35	−43	155	N	coel. nub. deinde nix et pl.
	3. 3. a. m	9	27,92	+13	150	N fort.	coel. ſeren. deinde nubil.
	— meridie	10	28,05	−25	152	NW	coel. obd.
	— 10. p. m.		27,80		151	W	nix.
	5. 6. p. m.	24	28,38	−55	165	N	coel. nubil.
	6. 6. p. m.		27,83		154	W	coel. obd. deinde ſerenum.
	9. meridie	11	27,92	−58	175	NW	coel. ſeren. dein. obd. nix, et v.
	— 11. p. m	24	27,34	+49	169	SW f.	nix, deinde coel. nubil.
	10. 11. p. m		27,83		180	N	coel. ſeren.
	23. meridie	18	28,23	−36	172	malac.	coel. nubil.
	24. 6. a. m.		27,97		168	malac.	coel. obd.
	25. 0. a. m.	30	28,12	+48	163	N	coel. ſeren. deinde nubil.
	26. 6. a. m.		28,60		171	W	nebula, coel. ſer. dein obd. nix
	27. 0. a. m.	24	28,58	−30	166	W	coel. obd. dein. nix et pluu.
	28. 0. a. m.	27	28,28	−60	151	SW f.	nix coel. obd.
	29. 3. a. m.		27,68		148	SW ff.	coel. obd.
	30. 9. p. m.	27	27,45	+38	156	SO	nix copioſa, coel. obd.
	31. 12. p. m.		27,83		167	NO	coel. obd.

II. Ther-

II. Thermometrum.

1. Thermometri altitudines minimae, maximae et mediae pro singulis mensibus anni 1780.

Mense	Altitudo minima.			Altitudo maxima.			Diff.	Altit. media.	
	Gr.	Die	hora	Gr.	Die	hora	Gr.	nocte Grad.	merid. Grad.
Ianuar.	186	4. 13.	6. a. m. 9. p. m.	152	8. 11. 15.	6. a. m. 6. a. m. 9. p. m.	34	173	165
Februar	195	18.	6. a m.	145	26.	2. p. m.	50	169	161
Martii	178	3.	6. a. m.	138	16.	2. p. m.	40	160	150
Aprilis	167	3.	10. p. m.	129	26.	2. p. m.	38	152	144
Maii	152	5.	6. a. m.	121	8.	2. p. m.	31	141	131
Iunii	143	5. 6.	6. a. m. 6. a. m.	117	17.	2. p. m.	26	133	126
Iulii	138	3.	6. a. m.	109	26.	2. p. m.	29	126	119
Augusti	142	29.	6. a. m.	118	5.	2. p. m.	24	133	125
Septemb.	153	28. 30.	6. a. m 6. a. m.	127	12. 21. 22.	2. p. m. 2. p. m 2. p. m.	26	141	133
Octobr.	158	10.	7. a m.	132	19.	10. p. m.	26	145	137
Nouemb.	170	21.	6. a. m	144	1. 2. 5.	2. p. m. 6. a. m. 2. p. m.	26	155	151
Decemb.	182	11.	9. a. m	147	2.	9. p. m.	35	164	159
Anno 1780.	195 Mense Februar.			109 Mense Iulii.			86	149	142

Hinc

Hinc patet, per totum annum fuiſſe:

Altitudinem Thermometri minimam, ſeu gradum frigoris maximi 195 grad. Delisl. die 18 Februarii hora matutina 6ta. Barom. 28. 08. Nebula, deinde coelum plane ſerenum, Boreas.

Altitudinem Thermometri maximam, ſeu gradum caloris maximi 109 grad. Delisl. die 26 Iulii hora poſtmeridiana 2da. Barom. 27. 90. Coelum obductum. Auſter.

Vnde variatio Thermometri maxima 86 graduum.

Altitudo Thermometri media inter omnes, quae mane et veſpere annotatae fuerunt, deprehenditur 149 graduum: ea autem, quae ex obſeruationibus poſtmeridianis eruta eſt, aequatur 142 gradibus. Sin autem menſes aeſtiuos *Maium* – *Octobrem*, ab hyemalibus *Ianuar.* – *April.* *Nouembr.* *Decembr.* ſeparamus, reperimus in illis calorem medium 128 grad.; in his vero frigus medium 162 grad.

2. Status

2. Status frigoris et caloris.

Menſe.	Dies frigid. Gradibus.					Dies calidiores Gradib.				
	190	180	170	160	150	110	120	130	140	150.
Ianuar.		9	18	30	31					-
Februar.	2	6	11	24	28					2.
Mart.			3	13	27				1	19.
April.				6	17			1	6	23.
Maii				-	2			14	29	31.
Iunii					-		3	23	29	30.
Iulii					-	1	17	31	31	31.
Auguſt.					-		4	29	31	31.
Septembr.					4			13	25	30.
Octobr.					7				17	31.
Nouembr.				8	23					14.
Decembr.		2	9	20	30					4.
Anno 1780.	2	17	41	101	169	1	24	111	169	246.

Oſtendit haec ſecunda Tabula, fuiſſe 169 dies, quibus Thermometrum deſcendit infra 150, hoc eſt gradum congelationis aquae naturalis: fuerunt autem inter hos, dies 101 frigidiores gradu 160 et 41 dies, quibus frigus excedebat 170 gradus. In his vero 17 dies frigidiores gradu 180, et 2 tantum annotati deprehenduntur, quibus frigus ſuperabat gradum 190.

Deinde quoad calorem, patet ex eadem tabula, hoc anno 1780 fuiſſe dies 246, quibus altitudo Thermometri praeualuit termino congelationis 150, et inter hos

169

169 dies fuiſſe calidiores gradu 140: porro 111 dies calidiores gradu 130: inter quos tandem 24 dies numerauimus, quibus calor ſuperabat gradum 120, et vnicum diem, quo calor excedebat gradum 110.

Vnde intelligitur, calorem hoc anno certe minorem fuiſſe quam annis praeteritis, et quidem ſatis notabiliter, ſi quidem has concluſiones cum illis comparemus, quae leguntur in tomis horum Actorum praecedentibus, nec non commentariorum voluminibus nouiſſimis.

3. Speciatim autem frigus obſeruatum fuit intra gradus.

	Dies
190 et 200 die 17. 18 Februarii - - -	2.
180 et 190 die 2 – 7. 12. 13. 14 Ian. die 15. 16. 19. 20 Febr. die 10. 11 Decembris -	15.
170 et 180 die 1. 9. 22. 25. 26. 28. 31 Ian. die 5. 6. 9. 10. 14 Febr. die 1. 2. 3 Mart. die 9. 12 – 15. 23. 26 - - -	24.
160 et 170 die 8. 10. 11. 15. – 17. 19. – 21. 23. 24. 27. Ian. die 1 – 4. 7. 8. 12. 13. 21 – 24. 29. Febr. die 8. 15. 21. 25 – 31 Mart. die 1 – 4 10. 11 April. die 16 – 23 Nou. die 4 – 8. 17. 22. 24. 25. 27. 31 Decembris - - - - - -	60.

4. Calor

4. Calor vero deprehensus fuit intra gradus

	Dies
110 et 100 die 26 Iulii - - - - -	1.
120 et 110 die 17. 21. 30 Iunii, die 1. 2. 7. 17 – 25. 27. 28. 29. 31 Iulii, die 1. 5. 6. 8 Augusti - - - - -	23.
130 et 120 die 26 Apr., die 6. 7. 8. 10. 11. 14 – 18. 28 – 31 Maii, die 7. 8. 10 – 16. 18. 19. 20. 22 – 29 Iunii, die 3 – 6. 8 – 16. 30 Iul., die 2. 3. 4. 7. 9 – 26. 28. 30. 31 Aug., die 1. 10 – 14. 17. 18 – 23 Sept. - - - - -	87.
140 et 130 die 16 Mart., die 17. 23. 25. 28. 30 Apr., die 1. 3. 5. 9. 12. 13. 19 – 27 Maii, die 1 – 4. 6. 9 Iunii, die 27. 29 Aug., die 2 – 9. 15. 16. 24. 25 Sept., die 1. 2. 12. 13. 16 – 27. 29 Octobris - -	58.

 III. Ven-

III. Ventus et Ventorum Directiones.

Menſe	Malacia dies	Vent. lenis dies	Vent. fortis dies	Procellosus dies	Nord dies	N-O dies	Oſt dies	S-O dies	Sud dies	S-W dies	Weſt dies	N-W dies	Variabilis dies
Ianuar	5	11	11	4	8	1	3	1	4	0	8	6	—
Febr.	5	12	11	1	8	2	0	2	5	2	9	1	—
Mart.	3	13	11	4	7	0	1	1	2	6	10	4	—
April.	7	14	7	2	6	3	5	1	6	1	3	5	—
Maii	13	11	7	0	3	1	2	1	3	3	11	7	—
Iunii	8	10	9	3	2	0	9	1	0	2	9	4	3
Iulii	8	15	8	0	1	0	2	2	3	4	9	4	6
Aug.	4	14	10	3	1	9	5	2	1	0	6	7	—
Sept.	9	11	9	1	8	3	2	1	0	4	5	7	—
Oct.	5	12	12	2	1	1	3	3	8	9	6	0	—
Nou.	6	19	5	0	4	0	6	5	5	3	3	4	—
Dec.	3	13	13	2	9	2	0	1	1	5	6	7	—
Anno 1780.	76	155	113	22	58	22	38	21	38	39	85	56	9

Vnde patet, hoc anno vti et praecedente maxime regnaſſe zephirum et quidem menſibus Maii et Martii, tum vero Boream praeſertim menſibus Decembris, Ianuarii, Februarii et Septembris. Porro malaciae frequentiſſime obſeruatae fuerunt Menſe Maii. Denique hic annus minus procelloſus fuit anno vltimo elapſo: ceterum procellae praeſertim menſibus Ianuarii et Martii frequentius occurrunt quam reliquis.

Speciatim autem procellae hoc anno flauerunt e regione.

		Dies.
N	die 18 Ian., die 3 Martii - - - -	2.
SO	die 25 Febr. - - - - - - -	1.
S	die 19 Ian., die 5 April., die 2. 20 Oct. -	4.
SW	die 6. 22. 30 Martii, die 5 Iunii, die 23 Sept. die 28 Dec. - - - - -	6.
W	die 11. 15 Ian., die 4 April., die 1. 3 Iunii, die 12. 26. 30 Aug. - - - - -	8.
NW	die 20 Decembris - - - - -	1.

IV. Conſtitutio Coeli.

Menſe.	Coelum ſerenum	Coelum obductum	Nebuloſum	Pluuia	Nix	Quantit. aquae pluuiae.	
	dies	dies	dies	dies	dies	Dig.	p. c.
Ianuar.	4.	14.	5.	0.	16	0,	25.
Februar.	6.	13.	5.	2.	8.	0,	20.
Martii	6.	10.	2.	7.	14.	0,	67.
Aprilis	1.	10.	4.	11.	8.	1,	33.
Maii	10.	5.	7.	14.	0.	1,	08.
Iunii	10.	4.	0.	8.	1.	2,	59.
Iulii	10.	3.	1.	12.		1,	97.
Auguſti	10.	5.	2.	9.		1,	20.
Septemb.	10.	5.	7.	10.	3.	1,	69.
Octobr.	5.	15.	4.	19.	3.	2,	57.
Nouemb.	6.	21.	2.	7.	14.	0,	94.
Decemb.	8.	11.	2.	1.	12.	0,	86.
Anno 1780.	86.	116.	41.	100.	79.	15,	26.

Excellebant ergo quoad ſerenitatem coeli menſes Iulii, Iunii, Maii, Auguſti, et Septembris. Frequentius pluit menſe Octobris, Maii, Iulii et Aprilis, et nix copioſa cecidit praeſertim menſe Ianuarii, Nouembris, Martii et Decembris. Nebulae maiore copia obſeruatae fuerunt menſe Maii et Septembris.

Quantitas aquae pluuiae et niuis, quam Cel. Prof. *Lexell* et poſt eius profectionem Clar. Adiunctus *Gollovin* ſecundum calendarium vetus annotauerunt et mecum communicauerunt, a die 12 Ianuarii huius anni ad eundem 12 Ianuarii ſequentis aequiualet altitudini $15\frac{26}{100}$ pollicum pariſinorum.

V. Reliqua phaenomena.

Grando cecidit duobus tantum diebus: die ſcilicet 9 Iulii et die 2 Septembris.

Aurorae boreales, quas vir curatiſſimus *Schröter* incola huius loci praeclarus obſeruauit, fuerunt 20 et quidem 12 lucidae die 5 et 29 Februarii, die 27 Auguſti, die 2. 3. 4. 7. 10 et 22 Septembris, die 28 Octobris, die 23 Nouembris et die 25 Decembris: reliquae 8 fulgentes die 15 Februarii, die 2 Martii, die 13 Aprilis, die 11 Septembris, die 4 et 24 Octobris, die 20 Nouembris et die 19 Decembris.

Tonuit 11ies: die 17 Maii, die 14. 15. 21. 25 et 26 Iulii et die 27 Auguſti; ac vehementius die 13. 22 et 23 Iulii et die 25 Auguſti.

Flumen Neua glacie liberabatur die 21 Aprilis, poſtquam per ſpatium 142 dierum glacie obductum perſtitit. Deinde poſt 214 dies, hoc eſt die 21 Nouembris denuo glacie obtegebatur.

Fig. 1.

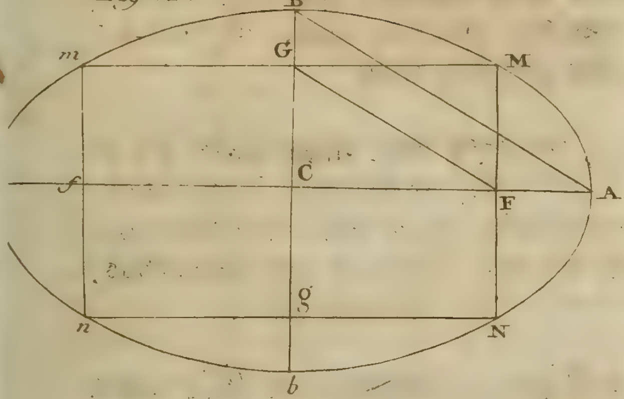


Fig. 2.

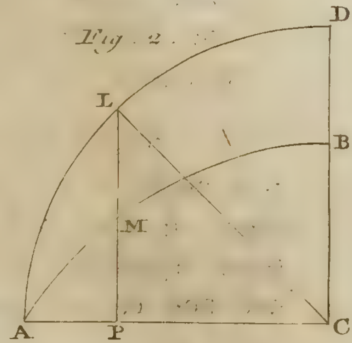


Fig. 3.

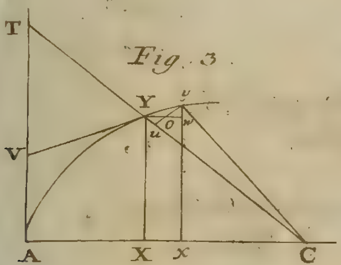


Fig. 4.

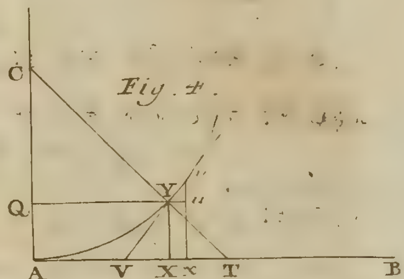


Fig. 5.

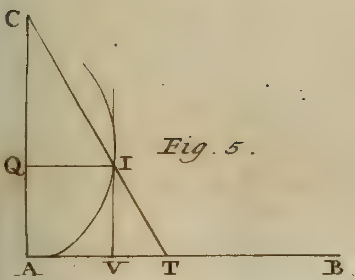
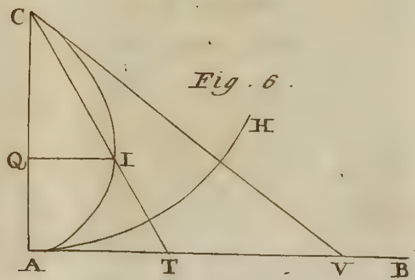
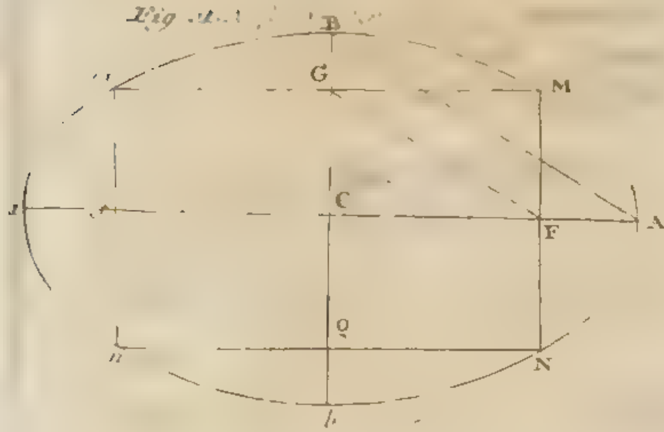
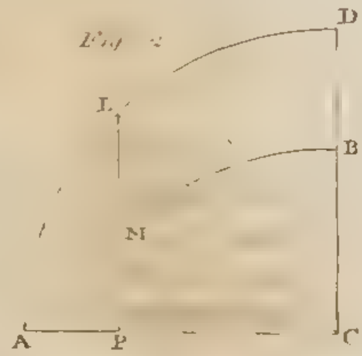
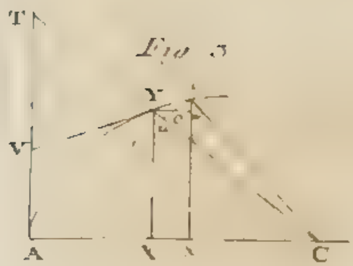


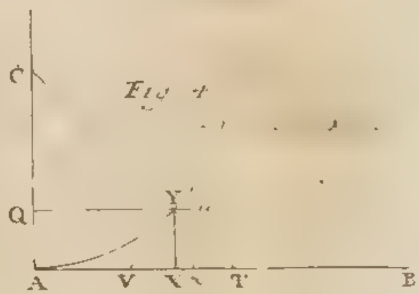
Fig. 6.

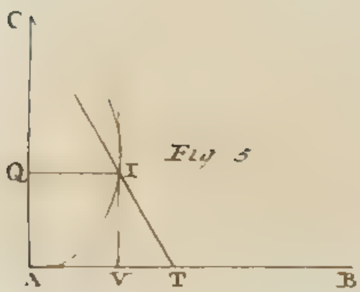


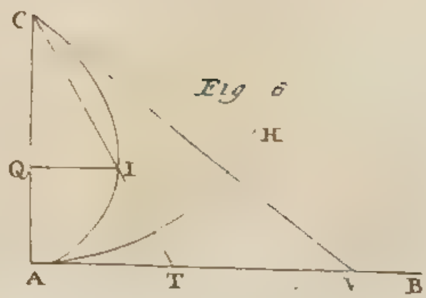

Fig. 1
B
G
M
C
A
F
Q
N


Fig. 2
D
L
B
M
A
P
C


Fig. 3
T
Y
V
A
C


Fig. 4
C
Q
Y
A
V
X
T
B


C
Fig. 5
Q
I
A
V
T
B


C
Fig. 6
H
Q
I
A
T
B

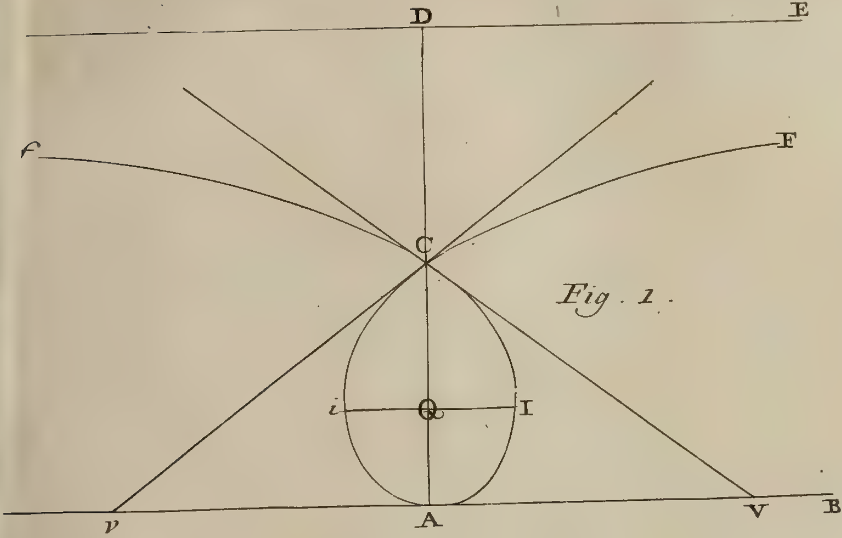


Fig. 1.

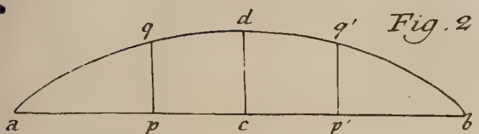


Fig. 2.

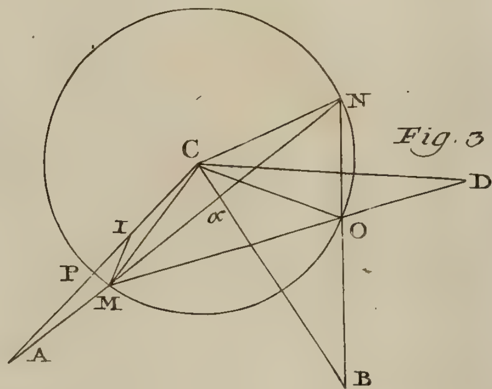


Fig. 3.

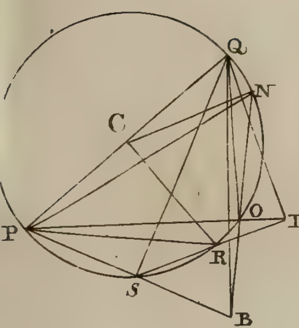


Fig. 4.

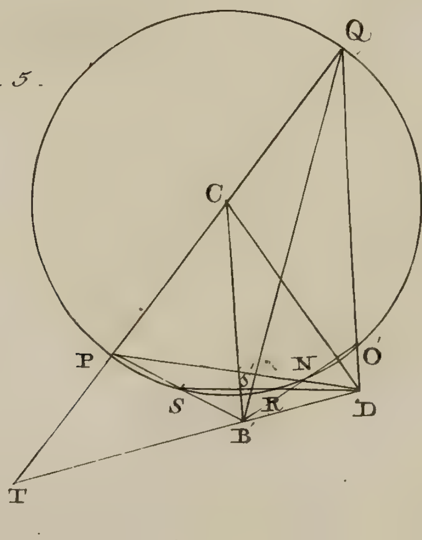


Fig. 5.

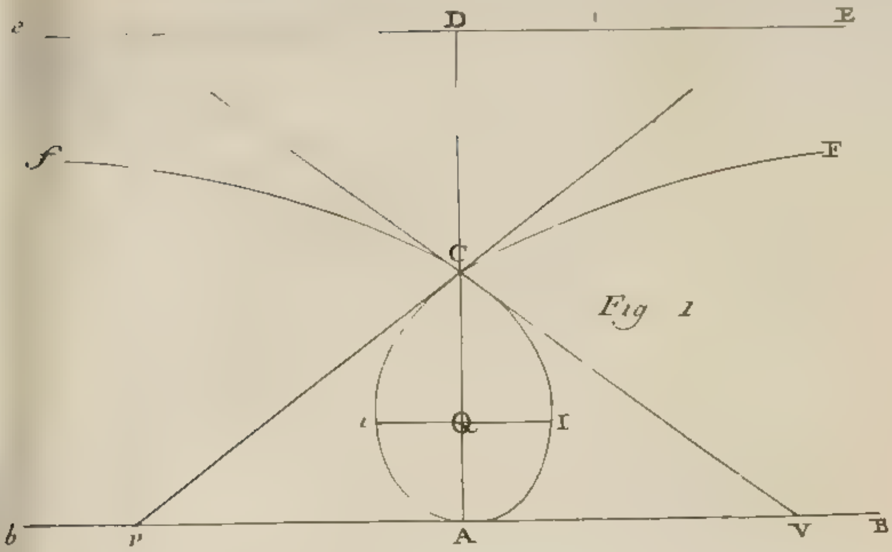


Fig 1

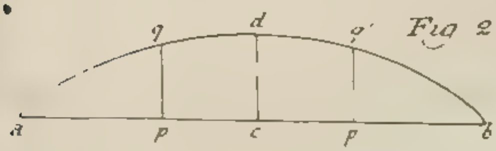


Fig 2

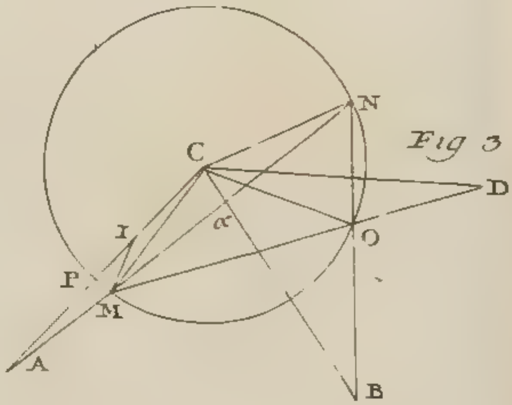


Fig 3

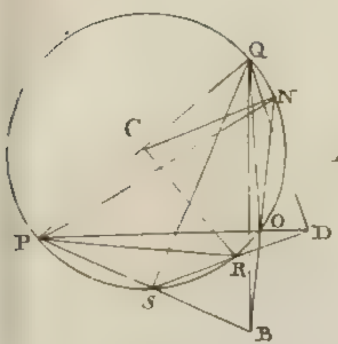
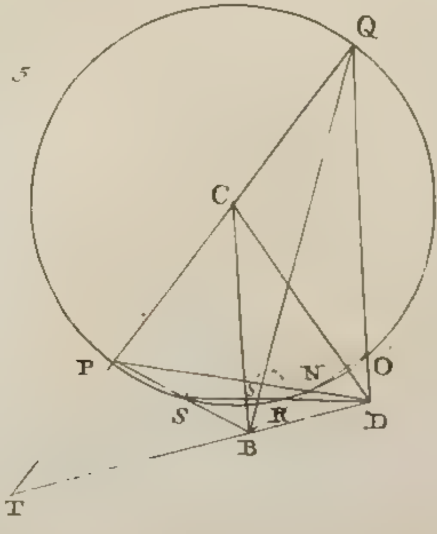
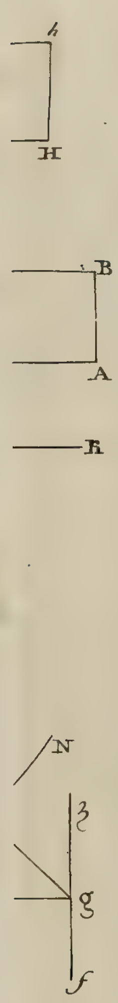


Fig 4

Fig 5




h
H
B
A
R
N
z
g
f

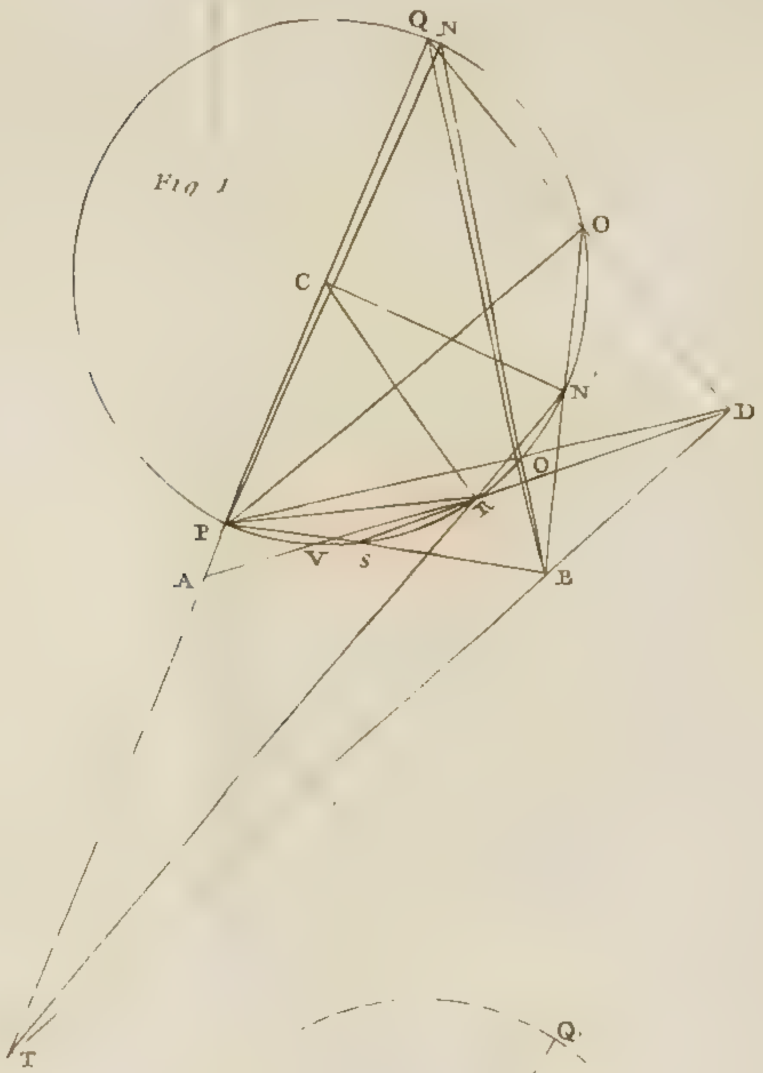
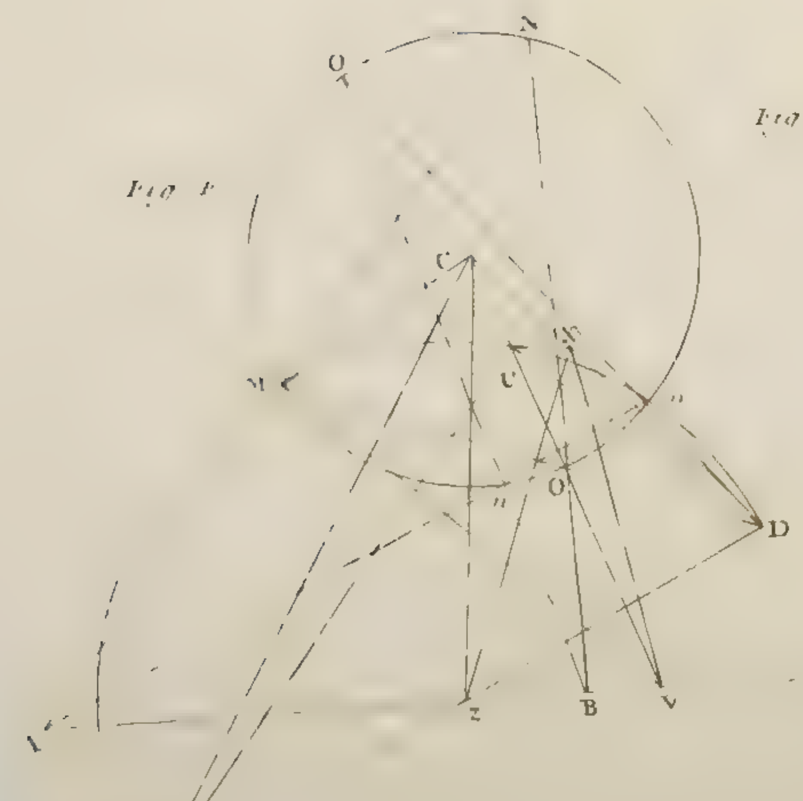
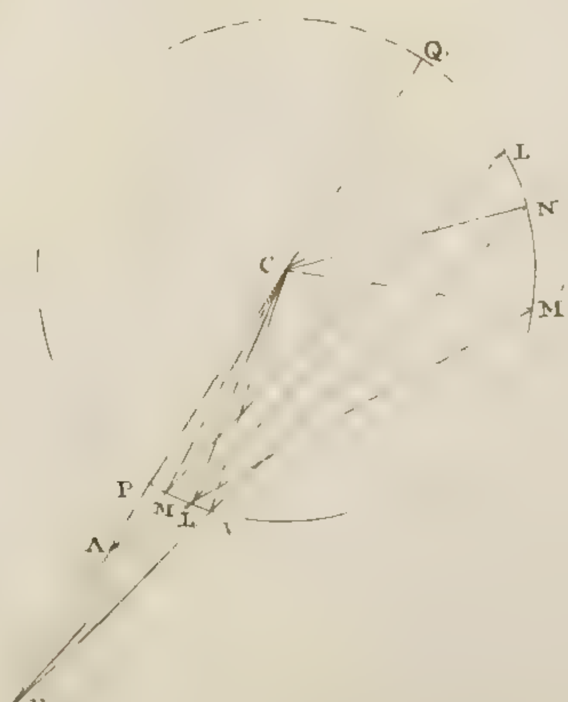


Fig 1



Fig 2





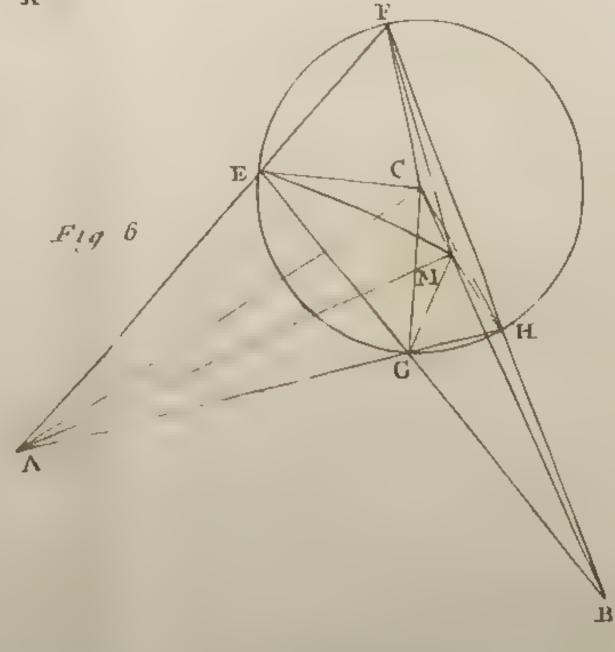


Fig 6

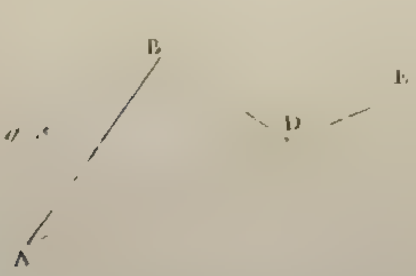


Fig. 2.

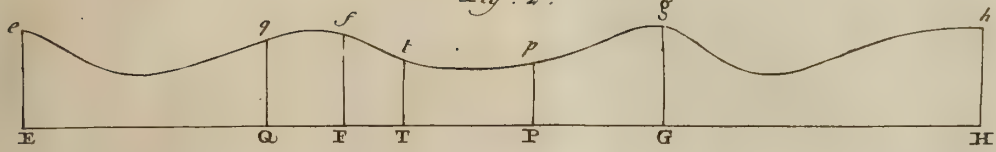


Fig. 3.

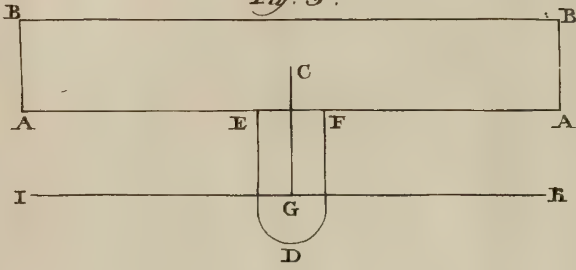


Fig. 1.

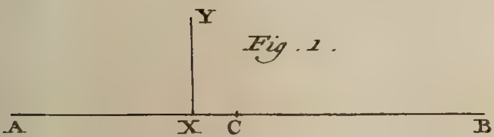


Fig. 4.

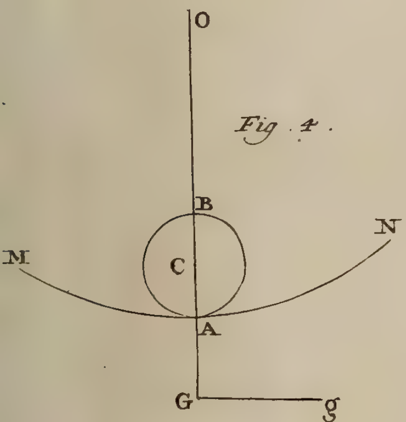


Fig. 5.

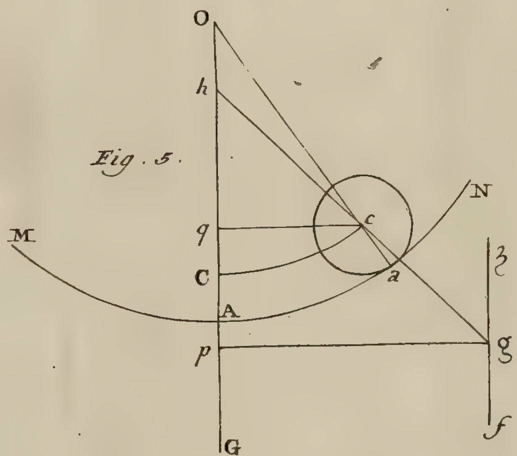


Fig. 6.

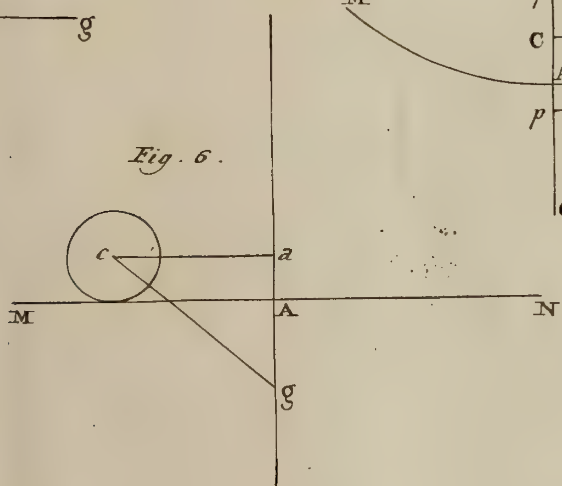


Fig 2

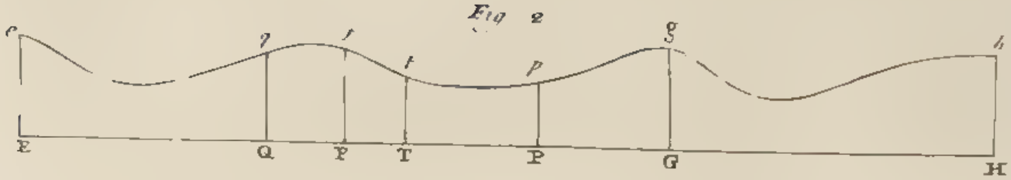


Fig 1

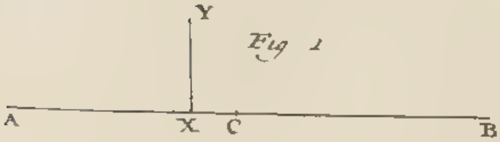


Fig 3

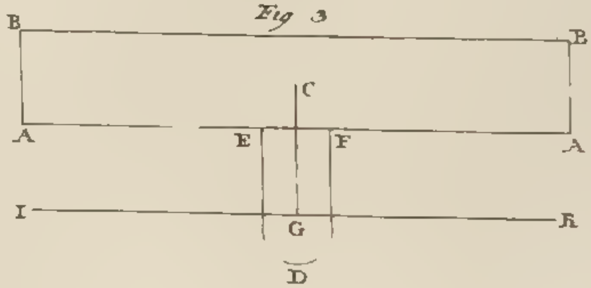


Fig 4

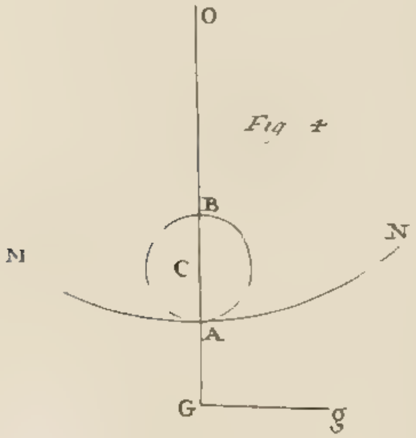


Fig 5

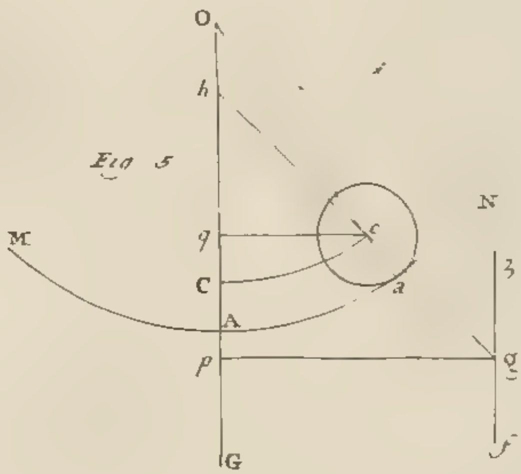
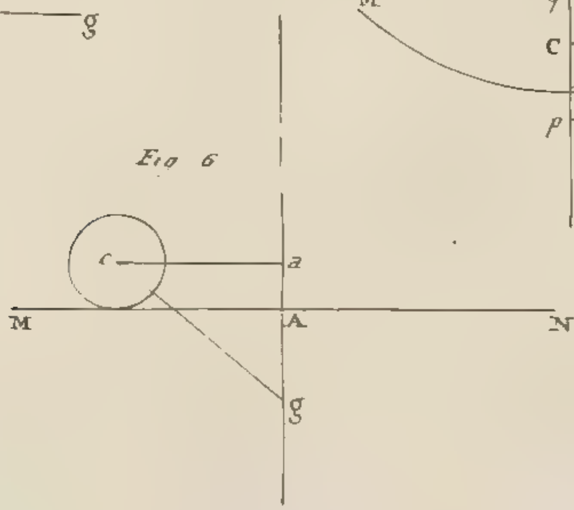


Fig 6



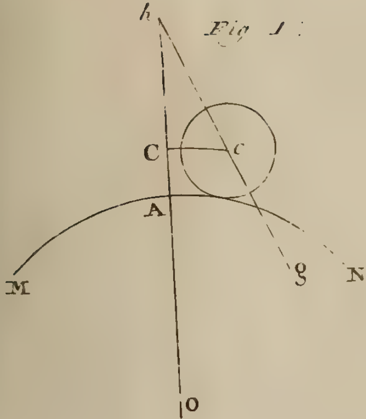


Fig. 1.

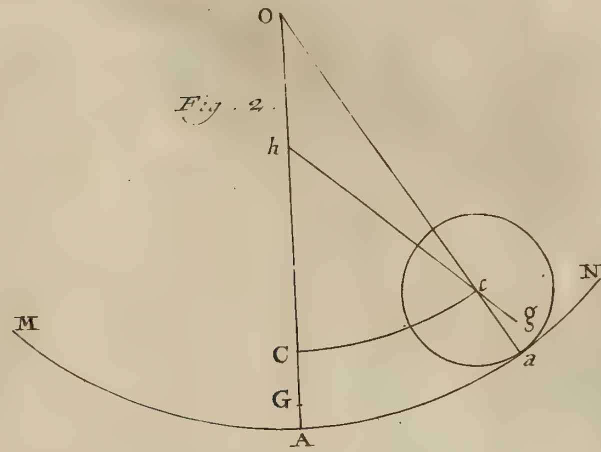


Fig. 2.

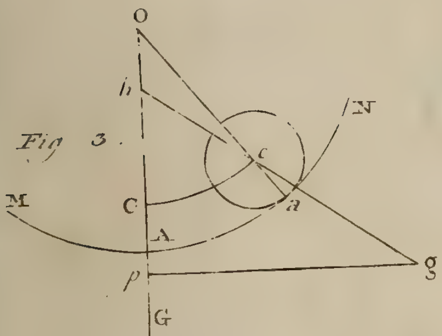


Fig. 3.

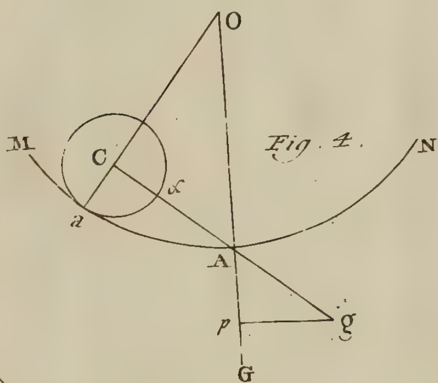


Fig. 4.

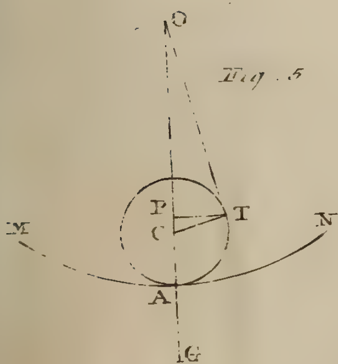


Fig. 5.

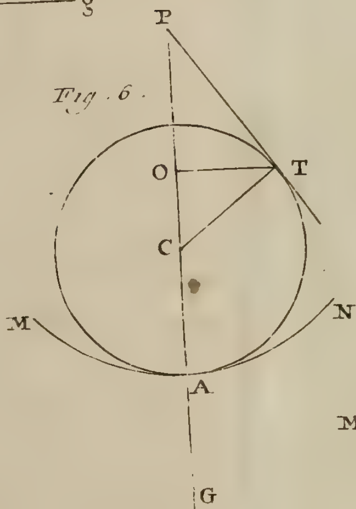


Fig. 6.

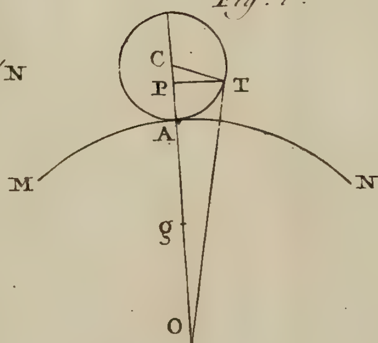


Fig. 7.

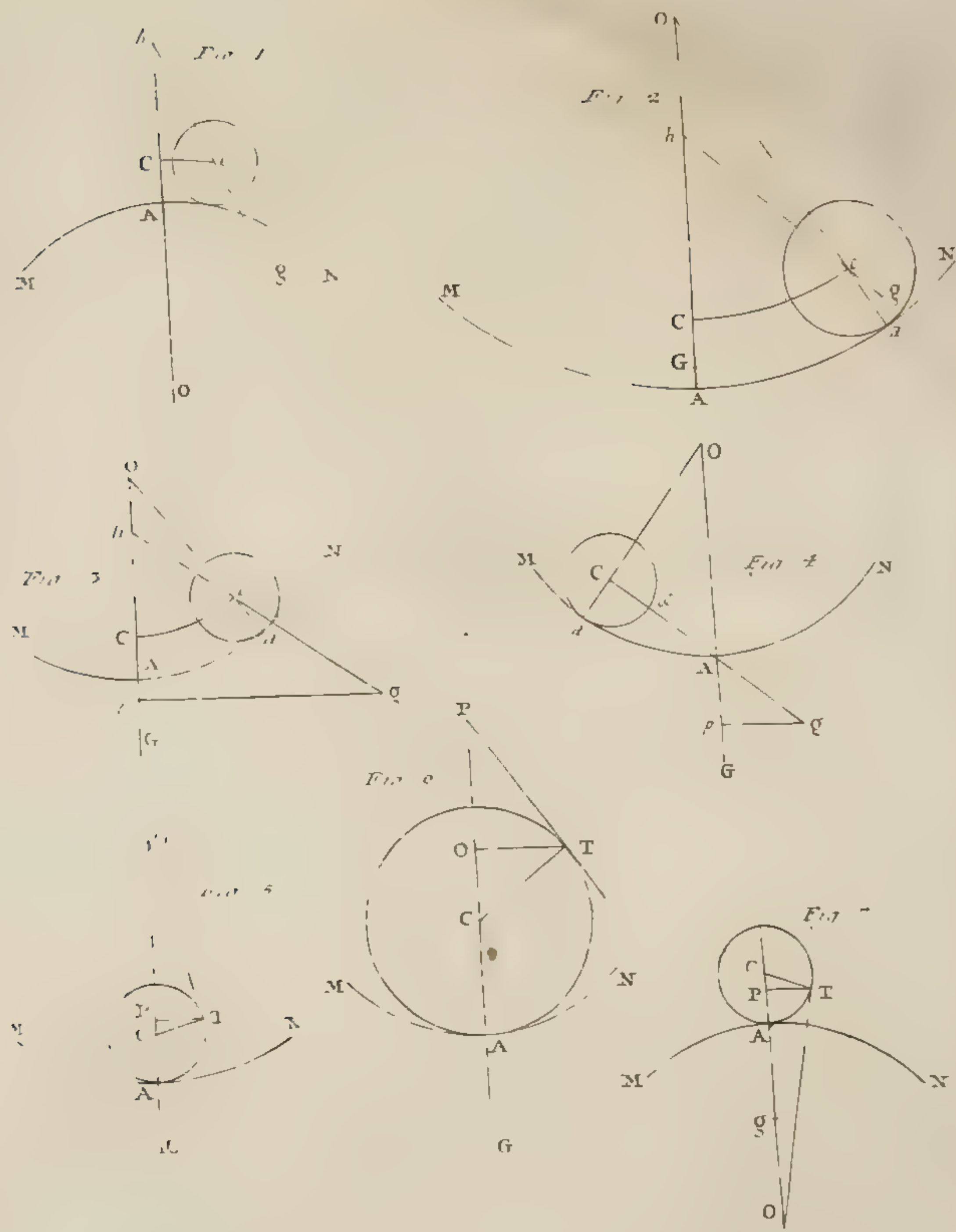
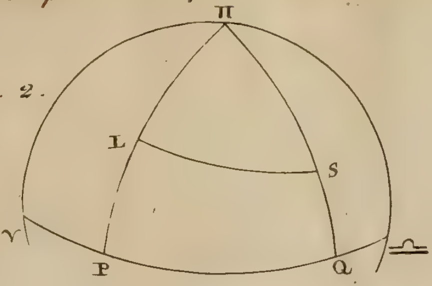


Fig. 2.



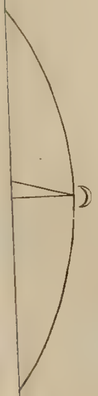


Fig. 5.

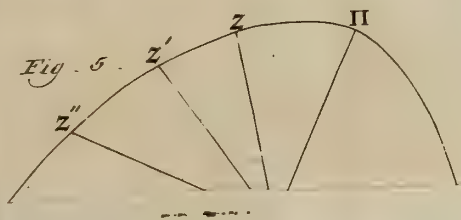


Fig. 1

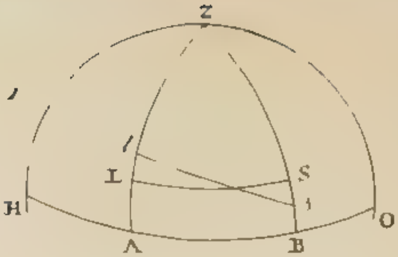


Fig. 2

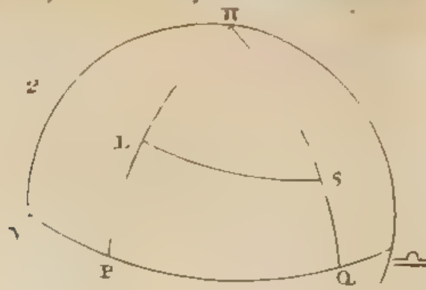


Fig. 3

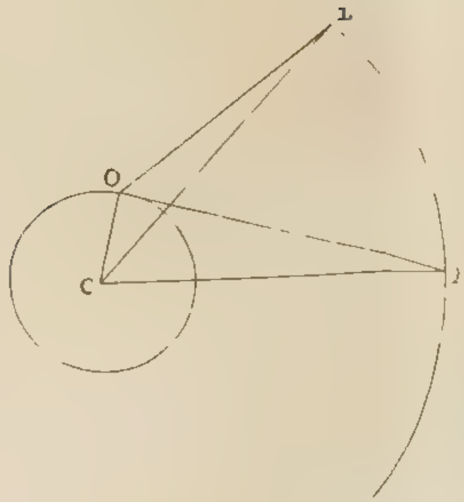


Fig. 4

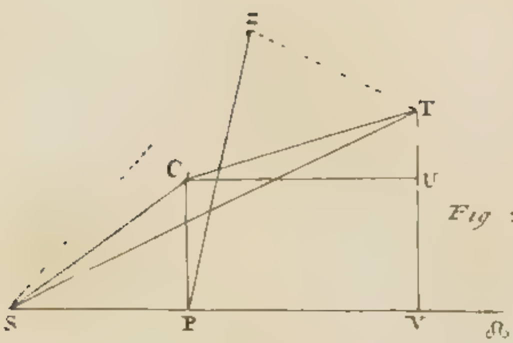


Fig. 5

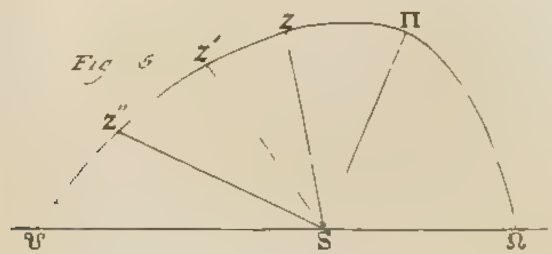


Fig. 6

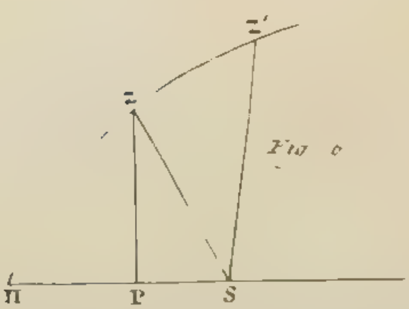


Fig. 7

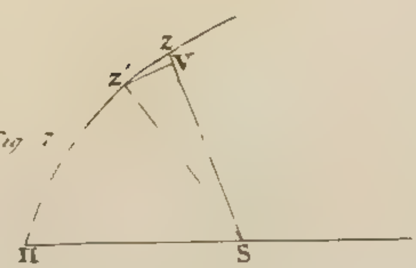


Fig. 1.

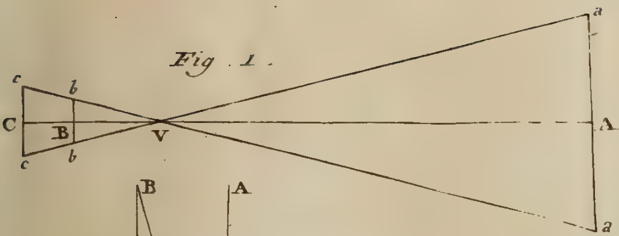


Fig. 2.

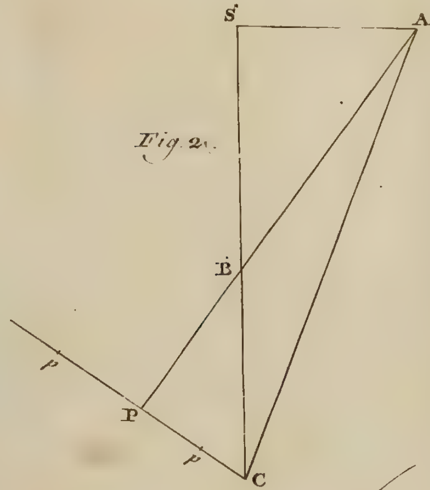


Fig. 3.

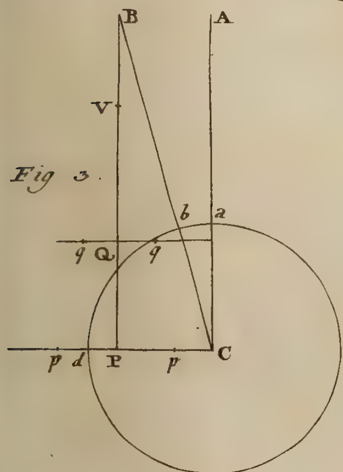


Fig. 4.

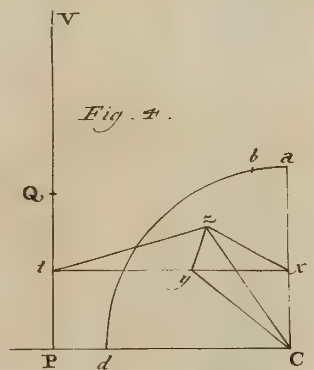


Fig. 5.

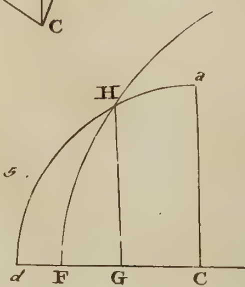


Fig. 7.

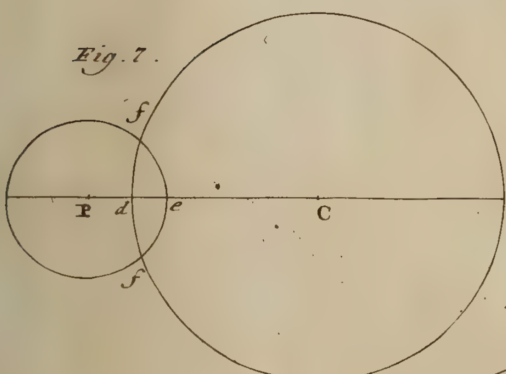


Fig. 8.

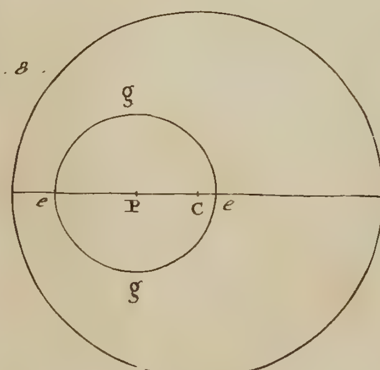
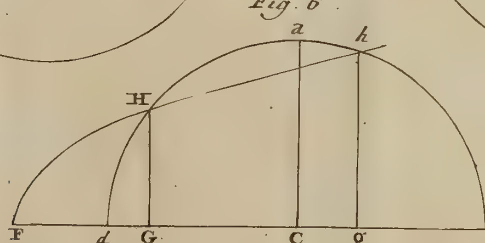
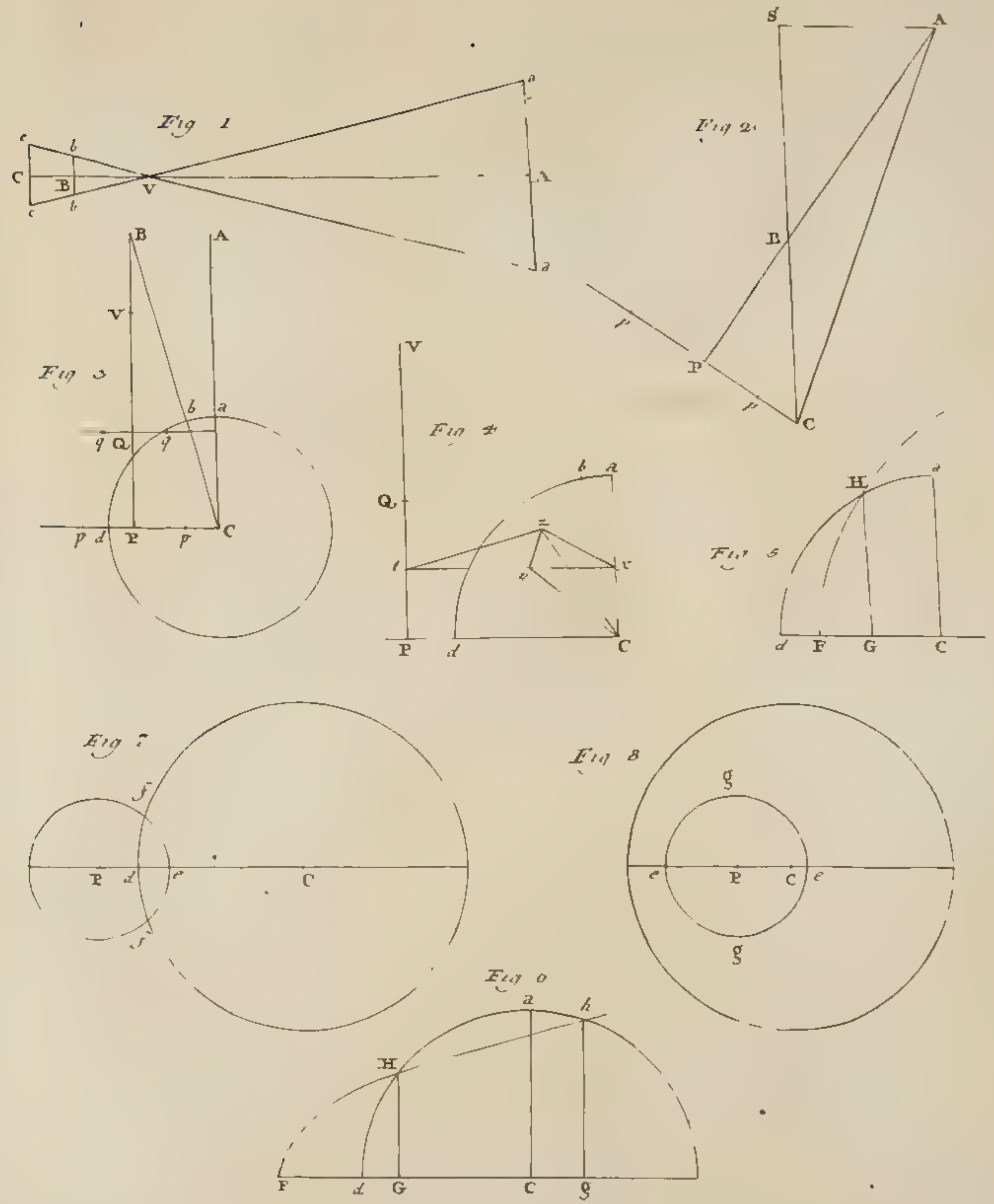
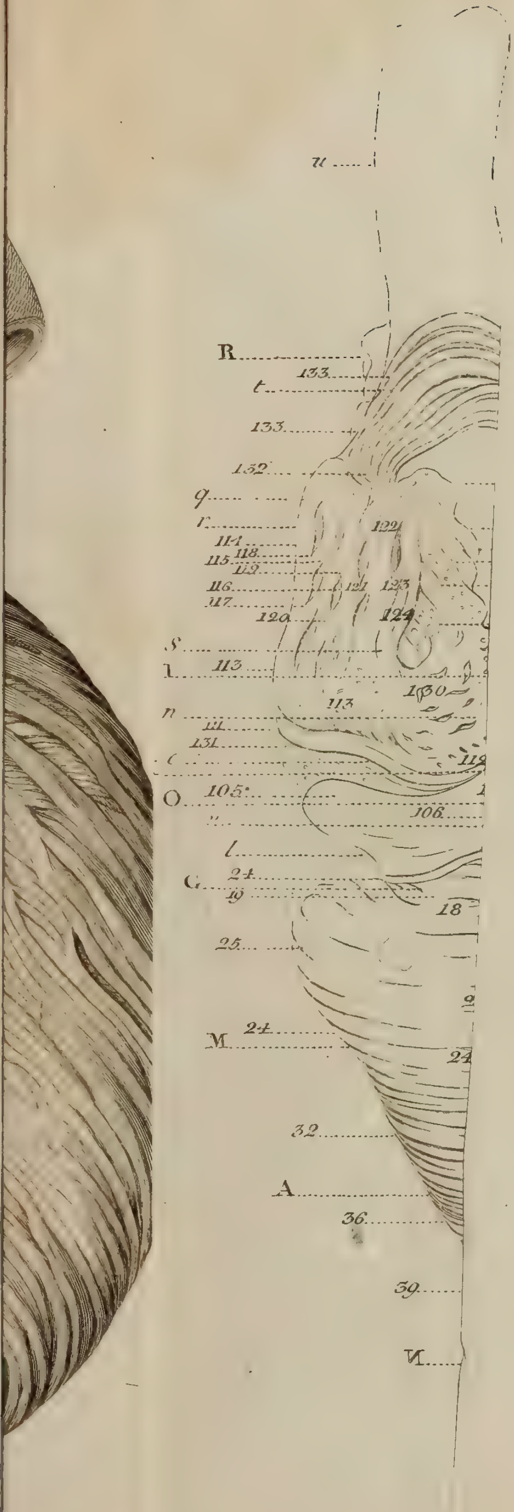


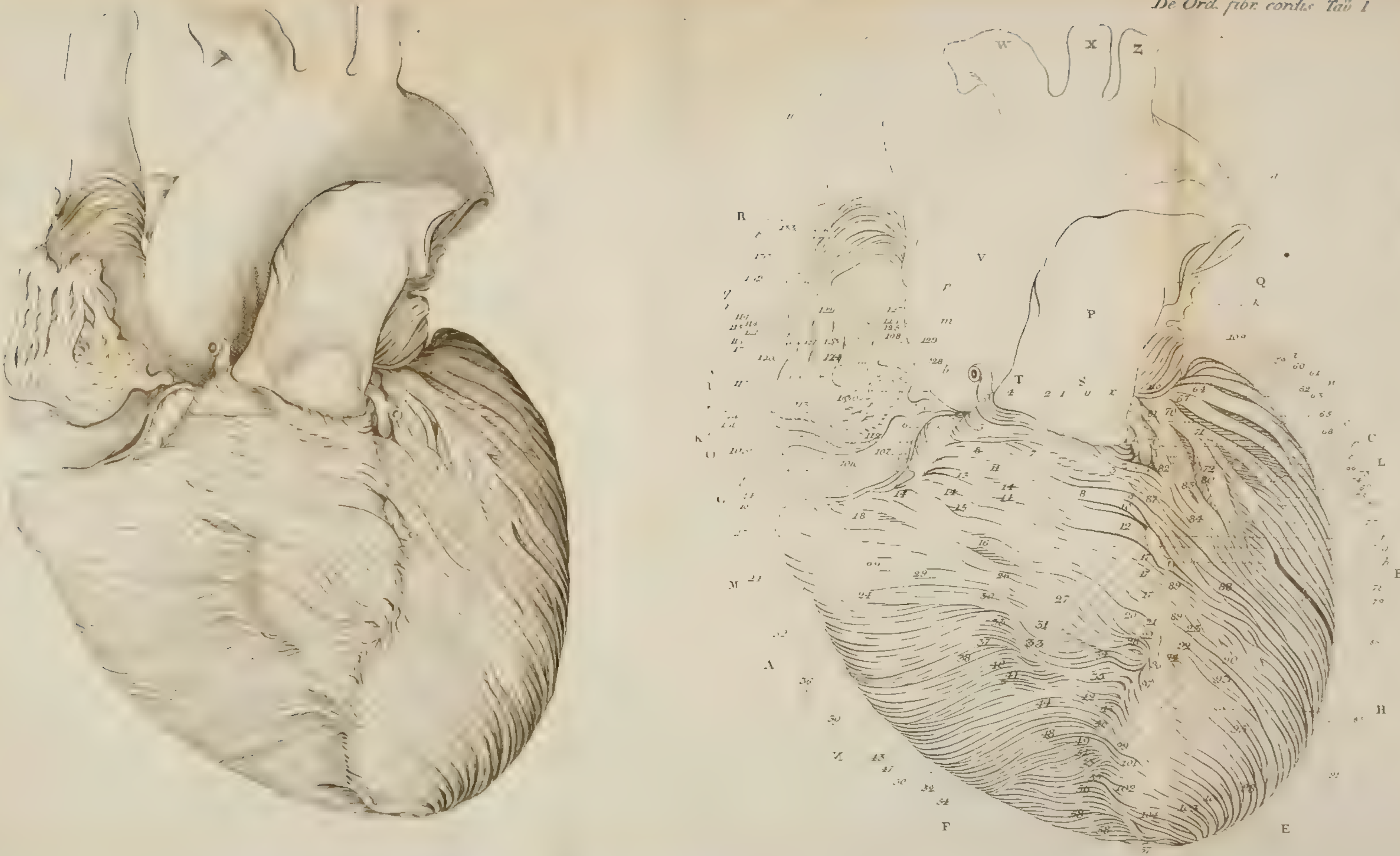
Fig. 6.




Fig 1
Fig 2
Fig 3
Fig 4
Fig 5
Fig 7
Fig 8
Fig 9



u
R
133
t
133
132
q
r
114
118
115
119
116
117
120
121
122
123
124
s
113
113
130
n
131
O
105
106
l
24
G
19
18
25
24
M
24
32
A
36
39


W
X
Z
R
V
P
Q
T
C
L
B
M
A
H
F
E
D

Réflexions sur les Etoiles fixes. Histoire de l'Ac. Imp. des Sc. A. 1780. D. Partie II.

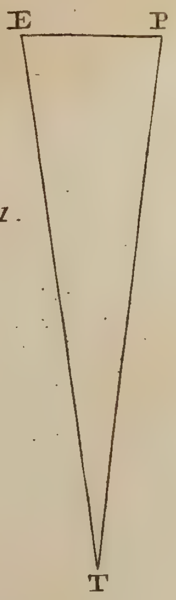


Fig. 1.

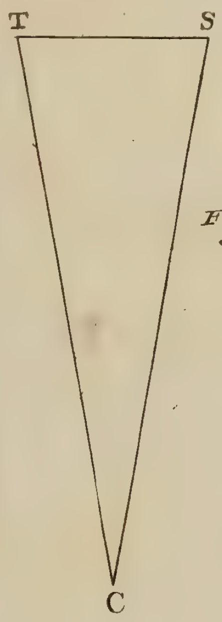


Fig. 2.

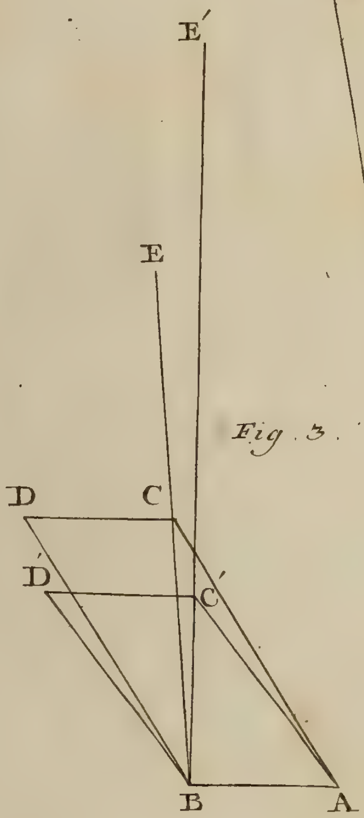


Fig. 3.

Reflexions sur les Etoiles fixes Histoire de l'Ac. Imp. des Sc. A. 1780. D. Partie II.

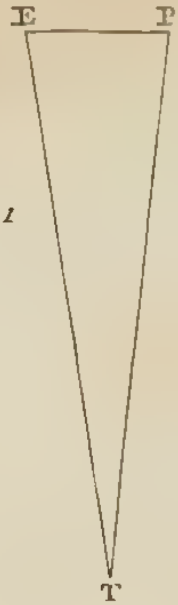


Fig. 1

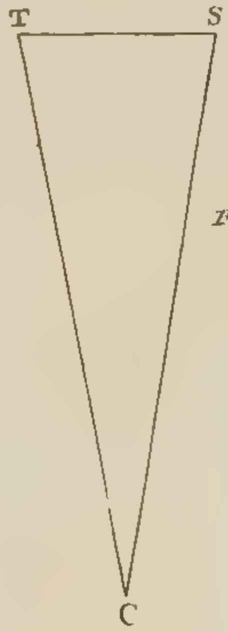


Fig. 2

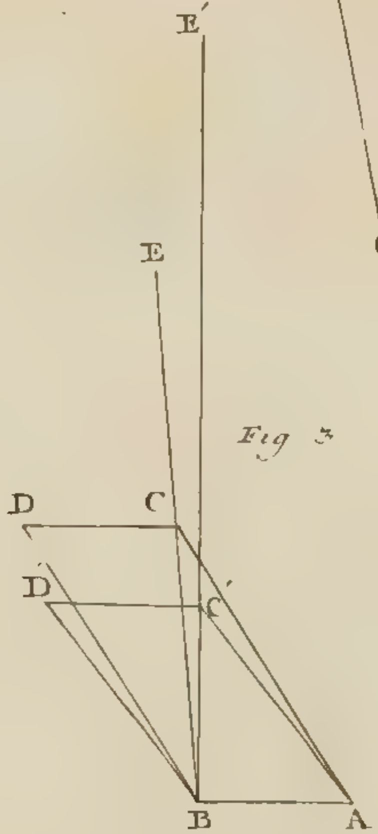


Fig. 3